Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes[1] ?

Bernard Vitrac
CNRS, UMR 8567,
Centre Louis Gernet, Paris, France.

« Le poème *Fears and Scruples* de Robert Browning
annonce prophétiquement Kafka, mais notre lecture de Kafka
enrichit et gauchit sensiblement notre lecture du poème.
Browning ne le lisait pas comme nous le lisons aujourd'hui …
Le fait est que chaque écrivain *crée* ses précurseurs.
Son apport modifie notre conception du passé aussi bien que du futur ».

J. L. Borgès, « Kafka et ses précurseurs », *Autres inquisitions,* dans
Œuvres complètes. Paris, Gallimard, 1993, Vol. I, p. 753.

Introduction

Pour tenter de répondre à la question posée, j'envisagerai successivement quatre points de vue : (**1**) lexical, (**2**) historiographique, (**3**) disciplinaire et (**4**) définitionnel. En fait je consacrerai la plus grande partie de mon intervention à l'examen de la quatrième approche, les trois autres me servant d'introduction.

(**1**) Le mot "algèbre" apparaît en français à la fin du XIVe siècle, décalquant le latin médiéval *algebra,* lui-même emprunté à l'arabe (« al-gabr » = la "réduction"). Le terme se trouve dans un certain nombre de titres d'ouvrages de mathématiques : « Kitâb … al-gabr wa-l-muqâbala » (« *libri restaurationis et oppositionis* » dans les traductions latines du XIIe siècle). Les plus célèbres de ces traités conservés en langue arabe sont ceux d'al-Khwârizmî

---

[1] Une première version de ce texte a été présentée au cours d'un colloque intitulé « L'irruption de l'algèbre », organisé à Amiens (France) par Christian Boulinier les 18 et 19 Février 2004. Je l'en remercie, ainsi que les (nombreux) participants à ces stimulantes réunions. Je remercie également le Docteur Jafar Aghayani-Chavoshi de m'avoir encouragé à publier ce texte dans la revue *Ayene-ye-Miras.*

(début du IX[e] s.), d'Abû Kâmil (fin du IX[e] s.), d'al-Karagî († 1016) et de ʻUmar al-Khyyâm (1048-1131). Des ouvrages intitulés de cette manière n'existent évidemment pas en Grèce ancienne et, puisque le terme "al-gabr" est arabe, on pourrait donc en conclure très rapidement qu'il faut répondre « non » à notre question initiale.

Bien entendu les choses ne sont pas si simples quand il s'agit de comparer deux cultures (et deux langues) : d'abord on peut bien imaginer que les anciens Grecs aient désigné autrement la spécialité mathématique qu'a constituée l'algèbre en pays d'Islam. Ensuite, on peut également envisager l'hypothèse que, même s'ils n'ont pas constitué et dénommé cette discipline en tant que telle, ils ont, à l'instar de monsieur Jourdain et de la prose, fait de l'"algèbre" sans le savoir.

Le point de vue lexical est donc un peu court, mais il a au moins un mérite : nous rappeler que les problèmes d'explicitation du savoir, la distinction entre, d'une part, ce que l'on trouve effectivement dans les documents scientifiques d'une culture et d'une époque données et, d'autre part, les interprétations que les historiens ou les savants d'une autre époque peuvent en faire est parfois très délicate à maintenir, tout particulièrement en ce qui concerne l'histoire des mathématiques. Celles-ci, en effet, se prêtent facilement à une lecture anhistorique procédant par ré-interprétations successives.

Pour le dire autrement, l'histoire des mathématiques, surtout quand elle est cultivée par les mathématiciens, est spontanément *comparatiste* et *rétrospective.* Le texte ou l'objet étudié est immédiatement — et le plus souvent implicitement — comparé à la pratique contemporaine de l'historien-mathématicien. Ceci est possible précisément à cause de cette capacité de ré-interprétation des résultats qui n'existe pas au même degré dans les autres domaines, même scientifiques. On peut le déplorer, mais je crains que le phénomène soit inévitable. Mieux vaut donc en prendre la mesure et l'expliciter. Ainsi, quand il s'agit de culture antique, désormais très loin de nous, il faut recourir à la distinction qu'introduisent les ethnologues lorsqu'ils étudient les cultures dites "premières" entre d'un côté le langage des "observés" et, de l'autre, celui de l'observateur.

Pour nous, cela veut dire distinguer le contenu des textes anciens de leurs lectures médiévales, modernes puis contemporaines. Bref il faudra spécifier le point de vue dont nous parlons. J'ajoute qu'en pratiquant un tel comparatisme explicite il ne s'agit pas de se contenter d'un relevé des ressemblances isolées et formelles entre tel concept ou telle méthode de l'un que l'on croit retrouver chez l'autre. Il faut surtout comparer leur place dans une configuration mathématique globale et cohérente pour être assuré d'en percevoir les significations essentielles.

(**2**) Que ce genre de distinction ne soit pas toujours si facile à faire se voit immédiatement si l'on adopte une approche historiographique : dans la littérature consacrée aux mathématiques grecques on constate, au moins depuis quelques décennies, qu'il n'y a pas de consensus sur le point de savoir si l'on peut, ou non, parler d'« algèbre grecque ». Je n'ai pas du tout l'intention de me lancer dans un fastidieux inventaire des positions et des arguments de chacun. Je me contenterai de relever quelques points importants :

• La discorde est plutôt récente, ce qui ne veut pas dire qu'elle n'a pas lieu d'être. Elle a été particulièrement virulente à propos de l'« algèbre géométrique » des Grecs, ensemble de résultats et/ou méthode que P. Tannery et H. G. Zeuthen, à la fin du XIXe siècle, pensaient pouvoir identifier dans des textes comme le Livre II des *Éléments* d'Euclide ou la théorie des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. La thèse selon laquelle la démarche de ces mathématiciens hellénistiques serait, en réalité, "algébrique" a été contestée dès les années 1920 puis surtout dans les années 70 au cours du débat qui a opposé Van der Waerden et Sabetai Unguru ainsi que leurs partisans respectifs[2]. Auparavant, la grande majorité des historiens des mathématiques n'hésitaient pas à parler d'« algèbre grecque ».

• Il faut dire qu'ils prenaient ainsi la suite de certains protagonistes de l'histoire médiévale puis renaissante de l'algèbre. Ainsi, Regiomontanus, dans une *Oratio* prononcée à Padoue en 1463, remarque :

> « Personne n'a encore traduit du grec en latin les treize beaux livres de Diophante dans lesquels la vraie fleur de toute l'arithmétique se trouve cachée, l'*ars rei et census,* que de nos jours on appelle d'après le nom arabe d'Algèbre »[3].

En fait plusieurs bio-bibliographes et algébristes arabes[4] mentionnent la traduction des *Arithmétiques* par Qusta Ibn Lûqâ comme un livre d'« al-gabr wa-l-muqâbala » ! C'est peut-être le titre que le lui avait donné le traducteur mais ce n'est pas tout à fait sûr car la désignation que l'on trouve dans les colophons de l'unique manuscrit qui contient les Livres IV à VII varie quelque peu[5].

---

2 Analyse et références dans [Euclide, 1, 1990], pp. 366-376. Les références complètes des ouvrages cités se trouvent dans la bibliographie.

3 Je traduis en français d'après la citation de [Heath, 1981], vol. II, p. 454.

4 Notamment Ibn al-Nadîm, Ibn al-Qiftî, Ibn Abî Usaybî‘a, Abû' al-Faraj, al-Hazîn, Ibn al-Haytham. Voir [Sésiano, 1982], p. 13 et [Rashed, 1984], pp. X-XIV.

5 « Sur les carrés et les cubes », « sur les problèmes arithmétiques », « traité d'algèbre ». V. [Sésiano, 1982], p. 13 et [Rashed, 1984], pp. XIV-XVI.

Cela dit, dès cette époque, il n'y a pas unanimité. Ainsi ‘Umar al-Khayyâm, dans l'introduction de son traité[6], affirme :

> « Une des notions mathématiques dont on a besoin dans la partie du savoir connue sous le nom de mathématique est l'art de l'algèbre et de l'al-muqâbala, destiné à déterminer les inconnues numériques et géométriques. Il contient des espèces <de problèmes> dans lesquels on a besoin d'espèces de propositions préalables très difficiles, et dont la solution a été impossible à la plupart de ceux qui les ont examinées. Quant aux Anciens, il ne nous est rien parvenu de ce qu'ils en ont dit; peut-être, après les avoir recherchés et examinés, ne les ont-ils pas saisis; peut-être, leur recherche ne les a-t-elle pas obligés à les examiner; peut-être enfin rien de ce qu'ils en ont dit n'a-t-il été traduit dans notre langue ».

• L'approche historiographique, si elle n'est pas décisive, possède, elle aussi, un mérite : elle fournit en quelque sorte une liste des auteurs grecs susceptibles d'être concernés par une telle pratique de l'algèbre ignorante d'elle-même : Euclide, Archimède, Apollonius, Héron, Diophante et Pappus.

(**3**) Adopter le point de vue disciplinaire consisterait à s'intéresser à la constitution de l'algèbre en tant que telle. Les classifications des sciences mathématiques ont existé dès l'Antiquité. On en connaît au moins deux : le quadrivium dit pythagoricien — sans doute vaudrait-il mieux dire "platonicien" — et la classification dite (à tort) de Géminus qui, selon moi, remonte en fait à l'ancienne Académie (milieu du IV^e^ s. avant J.C.). Le premier est attesté dans les dialogues de Platon. Le néo-pythagoricien Nicomaque de Gérase (II^e^ s.) en proposera une fondation philosophique au début de sa célèbre *Introduction arithmétique.* La seconde est transmise, sous le nom de Géminus, philosophe stoïcien du I^e^ s. avant notre ère, par Proclus dans son commentaire sur le premier Livre des *Éléments* d'Euclide. Cela dit, le principe et les grandes lignes de cette classification étaient déjà connus d'Aristote (qui en fait la critique). L'intérêt de ces mises en forme encyclopédiques est triple :
(**i**) définir les spécialités, si possible à partir de leur objet et donc en contraste les unes avec les autres;
(**ii**) mais aussi les articuler dans un système de relations mutuelles exprimées, pour l'essentiel, à l'aide de métaphores familiales ou politiques : « sciences-sœurs » dans le quadrivium; sciences dites "filles" d'autres sciences par Géminus; sciences subordonnées à d'autres sciences, dites hégémoniques, chez Aristote;
(**iii**) prononcer des exclusions, car si le champ des mathématiques anciennes est vaste — plus vaste en un sens que chez les Modernes —,

---

[6] [Rashed & Djebbar], 1981, p. 11.

son extension n'est pas indéfinie. La nécessité de circonscrire le champ des mathématiques tient à l'ambiguïté du nom lui-même : "mathêma", au sens premier, signifie simplement "connaissances apprises".

Très clairement, dans les classifications grecques, il n'y a rien qui puisse correspondre à l'algèbre comme discipline (mathêma, au pluriel mathêmata) ou art (technè) bien identifiée. En revanche, si l'on admet que la question a pu se poser à un certain moment de l'histoire grecque, postérieur à la construction de ces schémas, l'algèbre — dans la mesure où elle ne semble pas avoir une implication exclusive avec les choses sensibles — devra se positionner par rapport aux deux sciences mathématiques "pures" (c'est-à-dire appliquées aux intelligibles) que sont l'arithmétique et la géométrie. Il y a donc là une piste à suivre en gardant présent à l'esprit qu'il faut modérer nos ambitions : nous ne devons pas nous attendre à trouver en Grèce une discipline constituée mais, au mieux, des anticipations d'algèbre, des méthodes à caractère algébrique.

(**4**) Les identifier suppose que l'on se fasse une idée assez claire de ce qu'est l'algèbre et cela nous conduit au quatrième et dernier point de vue, celui qui porte sur les contenus et qui, cela va de soi, est le plus important. Or, très clairement, la manière d'envisager l'algèbre comme spécialité mathématique est, elle aussi, quelque chose d'historiquement variable. Je distinguerai, à titre d'exemples et un peu arbitrairement, trois moments ou configurations :
(**i**) Le moment arabe : l'algèbre s'y constitue sous la forme d'une théorie des équations et la mise au point, puis le développement, d'un calcul algébrique portant sur des expressions de type polynomial. Il s'agit aussi d'étendre et de justifier les opérations arithmétiques à ces expressions ainsi qu'à des quantités que les anciens Grecs n'avaient pas considéré comme des nombres : les irrationnels algébriques et certains rapports. Dans cette perspective, comme l'indique certains auteurs arabes, l'algèbre relève du *calcul.*

(**ii**) Aux XVI^{e}-XVII^{e} siècles une autre dimension s'y ajoute (peut-être existait-elle déjà chez certains mathématiciens des Pays d'Islam, je l'ignore). L'algèbre est considérée comme un art heuristique permettant la résolution (par le calcul) de certains problèmes géométriques ardus. Ce nouveau point de vue implique d'identifier un objet géométrique, en l'occurrence une courbe ou une surface, à un objet algébrique, son équation. Les Anciens n'avaient pas ignoré la géométrie des courbes et des surfaces, mais la nouvelle approche suppose en particulier que l'on élimine l'antique théorie des proportions, souvent utilisée dans la caractérisation des courbes et surfaces comme lieux géométriques, et qu'on la remplace précisément par l'étude (et la classification) des équations algébriques.

(**iii**) Plus récemment encore, l'algèbre a été caractérisée comme l'étude de structures : groupes, anneaux, corps. Celles-ci reposent sur les notions fondamentales de « loi de composition » et de relations d'ordre, d'équivalence …

En chacun de ces trois moments il est facile de s'abandonner aux délices de l'histoire rétrospective selon la remarque énoncée par J. L. Borgès que j'ai placée en exergue. En prenant le point de vue très général de l'époque récente, nous n'aurons même aucun mal à trouver des "traces" d'algèbre à n'importe quel niveau de l'histoire des mathématiques, et donc aussi en Grèce ancienne, parce qu'il est quasi inévitable d'y rencontrer des opérations, des égalités ou des inégalités[7]. Cette manière de procéder a peut-être quelques avantages quand on s'adresse à des mathématiciens. Historiquement elle me paraît dangereuse et, sans grand intérêt.

D'où deux possibilités : (**i**) soit, à partir d'un point de vue rétrospectif type XVII^e^ siècle, examiner les relations éventuelles entre les méthodes dites algébriques et la géométrie des courbes dans l'Antiquité. Les textes pertinents seraient la théorie des proportions du Livre V d'Euclide qui servait à exprimer les "symtomata" des courbes, la géométrie desdites courbes développée par Archimède, Apollonius et Pappus …; (**ii**) soit explorer la dimension calculatoire des mathématiques grecques, la thématisation des équations en partant d'un point de vue en quelque sorte arabe. Les auteurs à considérer sont alors Euclide (mais cette fois son Livre II), Héron et Diophante. C'est la seconde solution que j'ai retenue.

I. Deux styles mathématiques en Grèce ancienne, algorithmique et démonstratif

Les textes mathématiques conservés montrent que plusieurs styles d'exposition ont été cultivés en Grèce ancienne. Je retiendrai deux, les plus importants pour la question qui m'intéresse ici, ceux que je désigne, par commodité, comme "algorithmique" et "démonstratif". Ce faisant, il ne m'échappe pas que je commets le genre d'anachronisme lexical dont j'ai parlé en commençant avec "algèbre" puisque le mot "algorithme" dérive du

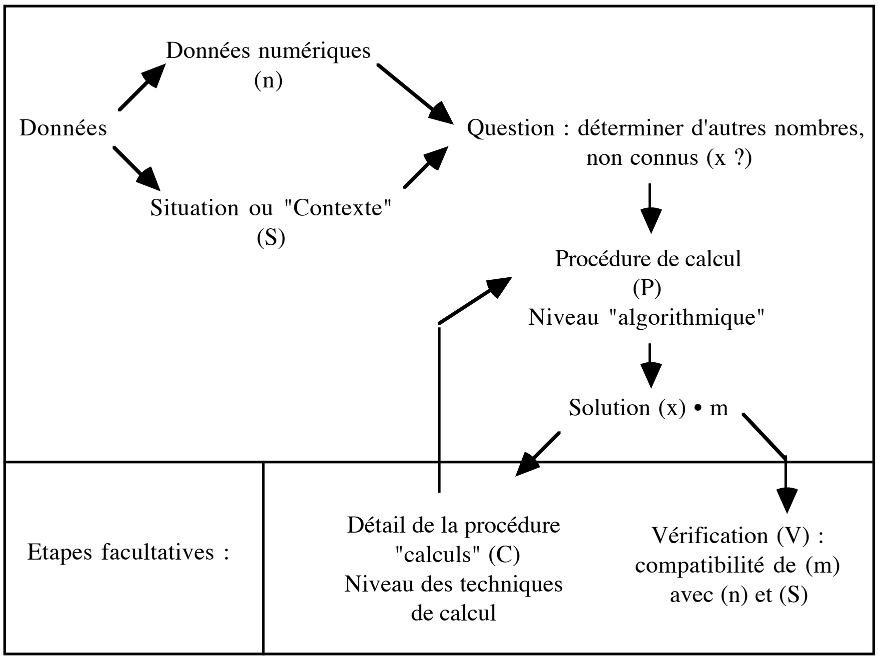
---

[7] Voir par exemple le chapitre XX de [Heath, 1981], vol. II, pp; 440-441, intitulé « Algebra : Diophantus of Alexandria », chapitre qui s'ouvre par une section consacrée aux 'Hau'-calculations des Égyptiens ou le chapitre « L'évolution de l'algèbre » dans [Bourbaki, 1974], p. 67, qui, pour les mêmes Égyptiens, évoque la notion de "loi de composition".

nom d'un des premiers algébristes arabes, al-Khwârizmî ! Je n'en soutiens pas moins qu'il existe une "algorithmique" grecque, autrement dit un mode de présentation codifiée pour un certain nombre de procédures de calcul. Les puristes pourront donc remplacer, partout dans ce que je vais dire, "algorithme" par "procédure de calcul", mais l'usage du qualificatif "algorithmique" me paraît préférable à celui de son équivalent "procédural" ou "procédurier" qui n'est pas d'usage courant en mathématiques.

Pour caractériser rapidement ces deux styles le plus simple est de considérer les unités textuelles qui les constituent :
• le problème calculatoire et les tables numériques pour le style algorithmique;
• les assertions non démontrées ou « principes » et les Propositions pour le style démonstratif.

Les mathématiques de type algorithmique semblent *quasi* universelles, du moins si l'on se limite aux cultures qui ont développé des mathématiques. On les rencontre en Égypte et au Proche-Orient ancien, en Inde, en Chine et aussi en Grèce ancienne. Dans les premières civilisations nommées, nous les connaissons essentiellement grâce à des documents d'origine scolaire. Durant l'Antiquité, les mathématiques démonstratives au sens strict n'existent, à ma connaissance, qu'en Grèce ancienne. Elles n'en constituent d'ailleurs qu'une partie et, d'un point de vue comparatiste, on pourrait dire qu'elles constituent l'exception plutôt que la norme, même si l'histoire ultérieure des mathématiques a souvent privilégié cette forme. La pierre de touche globale étant l'existence de la démonstration et de la déduction logique, il faut d'emblée distinguer deux types d'unités textuelles. Dans ces deux types, la tradition grecque fait état d'une variété de désignations et de la nécessité de distinguer des espèces. Ainsi pour les indémontrables on parlera de Définitions, Demandes, Postulats, Notions communes, Axiomes, Assomptions, Lemmes … Des Propositions, on distinguera les problèmes — ceux-ci prescrivent de faire quelque chose, généralement trouver tel(s) ou tel(s) nombre(s) ou construire une certaine figure — et les théorèmes qui énoncent que tel objet mathématique a telle propriété. Pour les uns comme pour les autres il y a une démonstration qui justifie la validité du théorème ou qui prouve que la solution proposée pour le problème est bien la bonne. Je n'insiste pas car cette modalité de présentation adoptée par les géomètres hellénistiques, notamment dans les *Éléments* d'Euclide, est bien connue de tous. Dans toutes les cultures que j'ai énumérées, la forme du problème calculatoire est sensiblement la même :



(**i**) Des données numériques connues (**n**) sont insérées dans
(**ii**) Une situation (**S**) plus ou moins concrète, plus ou moins artificielle, voire abstraite.
(**iii**) Une question, explicite ou non, propose de déterminer une ou plusieurs autres quantités présentées comme non connues.
(**iv**) La procédure de calcul (**P**) à suivre pour la (les) déterminer est exposée sous forme d'étapes.
(**v**) La ou les réponses sont données.
(**vi**) Dans certains cas, on trouve, en outre, le détail des calculs (**C**) réalisés au cours de la mise en œuvre de (**P**) : mise en évidence d'opérations fondamentales (duplication, dimidiation; extraction de racines carrées; inversion d'un nombre) … Cette analyse peut conduire à la constitution de tables numériques lesquelles, à terme, dispenseront de l'exposé du détail des calculs ou à la mise au point d'instrument type "abaque" qui a le même genre d'effet. Elle met aussi en évidence des problèmes-types que tout calculateur doit d'abord maîtriser. C'est un lieu d'exercice privilégié pour l'artificialité pédagogique.
(**vii**) Parfois une justification de ce que les résultats sont exacts, en fait la vérification que les quantités déterminées dans (**v**) satisfont les conditions imposées dans (**i-ii**). C'est notamment le cas dans les papyri mathématiques égyptiens.

Dans ce type de mathématiques, et contrairement à ce que l'on observe dans les mathématiques démonstratives grecques, le calcul est prépondérant. Certains auteurs évitent même d'utiliser le nom "mathématiques", d'origine grecque, et préfèrent parler de « codes de calcul » pour les désigner, ce qui permet d'évoquer, au passage, les codes de lois particulièrement importants au Proche-Orient ancien, lesquels partagent en effet avec les recueils de problèmes ou de présages la même structure formelle[8]. Un même type de rationalité est à l'œuvre dans ces domaines, à savoir l'utilisation des paradigmes "déplaçables" constitués par les cas enregistrés dans ces recueils. Ou, pour le dire autrement, on interpole — non pas au sens philologique du terme, mais plutôt comme on le fait avec les tables numériques —, entre lesdits cas, pour résoudre un problème apparenté. Comprendre ce genre d'activités mathématiques comme la simple compilation de recettes déterminées de manière empirique, directement issues de — et immédiatement réinvesties dans — des pratiques sociales est une grossière erreur.

Les problèmes de ce genre sont doublement particuliers : (a) par les données numériques données (**i**) ou calculées (**v**); (b) par le contexte dans lequel ces données s'insèrent. Précisons d'emblée qu'il y a tout un spectre de situations : certaines très concrètes présentent un contexte social précis (partage, arpentage, taux d'intérêts…), d'autres le sont nettement moins et reposent sur des catégories plus abstraites. Comparer, par exemple, les deux problèmes extraits du Papyrus d'Akhmim et les problèmes 38-39 de la section 24 des *Geometrica* (Annexes, 1-2a). Cela dit, dans les premiers, l'affabulation ne doit pas faire illusion; il s'agit de problèmes sur le maniement des parts (autrement dit les "fractions" unitaires).

Comme les travaux de Jim Ritter sur les mathématiques égyptiennes et babyloniennes[9] et ceux de Karine Chemla sur les mathématiques chinoises[10] l'ont très bien montré, l'"objet", si l'on peut dire, sur lequel travaillent les mathématiques algorithmiques est prioritairement la procédure plutôt que les éléments de l'"affabulation" concrète. La procédure doit sa généralité à la présence de "constantes numériques universelles" qui la caractérisent, nombres qu'il faut distinguer des données ou des résultats intermédiaires dans les calculs. Les identifier n'est pas toujours évident et le moyen le plus simple de l'enseigner est d'insérer successivement plusieurs problèmes utilisant le même algorithme avec des données différentes. On peut dire qu'il y a là une première forme d'abstraction.

---

[8] Cf. [Ritter & Vitrac, 1998] et, pour davantage de détails, les travaux de J. Ritter.

[9] V. [Ritter, 1989].

[10] V. par exemple [Chemla, 1992], [Chemla, 1996], [Chemla, 1997].

C'est donc le *recueil* de problèmes qui induira le questionnement sur la relation "particulier" *versus* "général". Celle-ci intervient d'ailleurs à plusieurs niveaux : au phénomène précédent s'ajoute le fait qu'en variant les situations, on fera apparaître la portée d'une procédure, au-delà du contexte dans lequel un premier problème a permis son exposition. Cette démarche peut déboucher sur la constitution de "classes" de problèmes, apparentés par la (ou les) procédure(s) mise(s) en œuvre, ce qui constitue donc une seconde forme d'abstraction. De plus, en montrant qu'un algorithme se laisse décomposer en plusieurs sous-algorithmes, exposés préalablement, les recueils de problèmes indiquent — implicitement — une analyse possible de ces "objets" mathématiques. C'est ce rôle déterminant de la procédure dans l'architecture de certains recueils qui justifie l'appellation de mathématiques *algorithmiques,* malgré l'évident anachronisme du mot.

Ultime remarque générale concernant les mathématiques de type algorithmique : le "contexte" n'est pas seulement un *prétexte* ou un habillage comme la lecture algébrique de type scolaire moderne amènerait facilement à le penser. Certes il peut parfois n'être qu'un artifice pédagogique — cf. les deux exemples extraits du papyrus d'Akhmim — mais, souvent, il est aussi un élément fondamental du problème, pour l'interprétation des valeurs numériques ou la compréhension de certaines étapes de la procédure, nous en verrons des exemples dans ce qui suit. Les algorithmiques des anciennes civilisations ne sont pas des systèmes symboliques déguisés. En outre le remplacement d'un contexte par un autre est une des manières de mettre en évidence la généralité d'une procédure. Il y a donc également un travail (méta ?)-mathématique sur le contexte.

Pour ce qui est des Grecs, outre quelques papyri scolaires tel le Papyrus d'Akhmim déjà cité, deux grands corpus nous font connaître leur algorithmique :

• Les recueils de problèmes du corpus héronien intitulés *Geometrica* et *Stereometrica* I, II, considérés comme des compilations d'époque incertaine mais dérivant de l'enseignement de Héron d'Alexandrie (peut-être du I^e^ s. de notre ère)[11].

• Les dix Livres conservés (6 en grec, 4 en arabe) des *Arithmétiques* de Diophante d'Alexandrie, composées originellement de 13 Livres, vers le milieu du III^e^ s. de notre ère[12].

---

[11] Édités dans [Heron, 1912-1914].

[12] Texte grec (avec trad. latine) *in* [Diophantus, 1893]. Trad. française *in* [Diophante, 1959]. Pour les livres conservés en arabe, v. [Sésiano, 1982], [Rashed, 1984].

La première remarque à faire — et elle a son importance si l'on se rappelle ce que nous avons dit du point de vue disciplinaire —, c'est que ces deux corpus respectent la division traditionnelle des genres géométrique et arithmétique. Le recours à la démarche algorithmique lui est en quelque sorte transversal. Il ne s'agit pas d'une discipline qui se constituerait à côté, au-dessus ou en dessous, de ces deux sciences. Je propose de reprendre quelques exemples empruntés, les uns au corpus héronien, les autres à Diophante.

II. L'exemple des problèmes 38-39 de la Section 24 des *Geometrica*

> 38. Si je mélange le diamètre et le périmètre et l'aire du cercle, et que, mélangés, je trouve pour l'une et l'autre des choses dites un nombre de 212 pieds, séparons chacun des nombres les uns des autres.
> 39 … Mélangés, le diamètre et le périmètre et l'aire du cercle produisent ensemble 67 1/2 pieds; séparons chacun des nombres les uns des autres.

Commençons par transcrire les données numériques et les opérations de nos deux problèmes (Annexes, 2a) comme procédure de calcul décomposée en une succession d'étapes :

	N°38	N°39
(i)	212 x **154** donne 32 648	(67 1/2) x **154** donne 10 395
(ii)	32 648 + **841** donne 33 489	10 395 + **841** donne 11 236
(iii)	le côté carré de 33 489 est 183	le côté carré de 11 236 est 106
(iv)	183 — **29** donne 154	106 — **29** donne 77
(v)	(**1/11**).(154) donne 14. Le diamètre est 14.	(**1/11**).(77) donne 7. Le diamètre est 7.
(vi)	Le périmètre est 44	Le périmètre est 22
(vii)	L'aire est 154	L'aire est 38 1/2
(viii)	Ensemble 212	Ensemble 67 1/2

L'étape (**viii**) est une simple vérification :

14+44+154 = 212; 7+22+38 1/2 = 67 1/2.

Les nombres soulignés en caractères gras sont ce que j'ai appelé les *constantes universelles* de la procédure : 154, 841, 29, 1/11. Un familier des nombres ne peut pas ne pas s'apercevoir que 154 = 11 x 14 et 841 = 29 x

29. Ici leur repérage est facile puisque le texte précise les opérations qu'il faut effectuer "καθολικῶς" = de manière universelle.

Ce n'est donc pas pour faciliter leur identification que l'on a inséré le problème 39 et ce n'est pas non plus pour souligner la portée de la procédure puisque la "situation" des deux problèmes est la même. Peut-être faut-il admettre que le N°39 a véritablement été ajouté au précédent quand on a vu que celui-ci faisait jouer trois rôles différents au même nombre 154 : en (**i**) il s'agit d'une constante universelle; en (**iv**) il s'agit d'un résultat partiel; en (**vii**) c'est l'un des nombres cherchés. Cette "polysémie" n'existe pas dans le N°39.

Notons ensuite la différence entre la manière dont on obtient la réponse à l'étape (**v**), comme résultat d'un calcul, et celles des étapes (**vi**), (**vii**), simplement affirmées. Or la comparaison des étapes (**v**) et (**vi**) nous dit que le rapport de la circonférence au diamètre d'un même cercle, au moins des deux cercles de nos problèmes, est celui de 22 à 7 ou 44 à 14, ou, pour le dire autrement que la circonférence vaut 3 fois le diamètre plus un septième dudit diamètre (22/7 = 3 + (1/7)).

On reconnaît donc deux cas particuliers d'un des résultats les plus célèbres des mathématiques grecques, transmis dans la Proposition 3 de *la mesure du cercle* d'Archimède qui établit que le rapport C : d — en termes modernes on dit le nombre π — est compris entre 3(10/71) et 3(1/7). Cette approximation par excès, 3(1/7), est commode pour les besoins des calculs comme le fait remarquer le commentateur d'Archimède, Eutocius.

Le lecteur ou l'étudiant l'a apprise juste avant, dans le problème 37 (§§ 44-45) qui expose deux procédures (exposées sur un exemple numériquement spécifié : d vaut 14) pour calculer le périmètre d'un cercle à partir de son diamètre et que l'on peut synthétiser comme suit :

• Multiplie toutes les fois le diamètre par 22. Divise en prenant le 7^{e}. Autant sera le périmètre.

• Autrement : Fais toutes les fois le triple du diamètre. Puis le 7^{e} du diamètre. Ceci, ajoute-le au triple, ce qui ensemble, produit le périmètre.

Si maintenant nous comparons nos deux problèmes en ce qui concerne les étapes (**v**) et (**vii**), nous voyons que pour deux cercles dont le rapport des diamètres est celui de 2 à 1, celui des aires est 4 à 1 (154 à 38(1/2)). C'est là aussi un cas particulier d'un célèbre résultat, celui de la Proposition XII. 2 des *Éléments* d'Euclide qui affirme que le rapport de deux cercles est le même que celui des carrés décrits sur leurs diamètres.

En outre il faut connaître un moyen de calculer l'aire du cercle dans l'étape (**vii**) à partir du diamètre et/ou de la circonférence. Là encore le même traité d'Archimède donne une réponse, cette fois dans la Proposition 1 : le cercle est égal à un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est égal à la moitié du diamètre, l'autre côté de l'angle droit à la circonférence du cercle. On peut formuler ce résultat un peu différemment. Certains auteurs, notamment Pappus et Théon, disent que le rectangle contenu par le diamètre et la circonférence (déroulée en droite) est le quadruple du cercle : Rect (d, C) = 4S. Par ailleurs puisque nous savons que le rapport de C à d est (approximativement) celui de 22 à 7, après quelques manipulations très simples pour éliminer les quantièmes et simplifier, nous obtiendrons : $14S = 11d^2$, ou, si l'on préfère, 11 fois le carré circonscrit au cercle. Dans la Proposition 2 (!) de *la mesure du cercle* Archimède dit que le rapport du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14. Rappelons-nous que la première constante universelle de nos problèmes est 154, soit 11 x 14; cela n'est dû au hasard !

Dissipons un malentendu. Je ne veux pas dire que le recueil de problèmes présuppose de son lecteur la connaissance du traité d'Archimède. Il faut sans doute faire la distinction entre l'usager dudit recueil et son concepteur. Clairement, l'auteur des problèmes en sait plus long que ce que la procédure explicite. Au demeurant si ces problèmes dérivent de l'enseignement de Héron, il n'y a aucun doute à ce sujet car Archimède est l'un des auteurs favoris de l'auteur des *Métriques.*

Quant à l'étudiant, il a appris, cette fois dans le problème 33 (§§ 39-40), deux procédures — exposées sur un exemple numériquement spécifié : d vaut 7 — pour calculer la surface d'un cercle à partir de son diamètre, que l'on peut synthétiser comme suit :

- Multiplie le diamètre par lui-même. Prends-en la moitié. Ajoute-lui la 4^e^ et la 28^e^ [parties]. Autant que cela sera l'aire du cercle.

  Soit : [$S = (1/2+1/4+1/28).d^2 = (11/14).d^2$].

- Autrement. Multiplie le diamètre par lui-même. Retranches-en la 7^e^ et la 14^e^ [parties]. Ce qui reste sera l'aire du cercle.

  Soit : [$S = (1-(1/7+1/14)).d^2 = (11/14).d^2$].

A partir de là, le problème posé, d + C + S = 212, se ramène à :

$$d + (22/7).d + (11/14)d^2 = 212,$$

en remplaçant C et S en fonction de d. Nous multiplions donc tout par 14 pour faire disparaître les fractions. Il viendra : $14d + 44d + 11d^2 = 212 \times 14$, soit :

$$11d^2 + 58d = 212 \times 14 \ (\mathbf{E}),$$

ce qu'un moderne écrirait $11d^2 + 58d - 2968 = 0$ et qu'on appelle équation du second degré.

L'équivalent géométrique de certaines formulations modernes du second degré se trouve dans le Livre **II** des *Éléments* d'Euclide, notamment l'identité remarquable de la Proposition **II**. 4 :

> « Si une ligne droite est coupée au hasard, le carré sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments »,

ce que nous transcrirons : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. C'est le moment de remarquer que dans notre égalité 11T(d) + 58d = 212 x 14, le coefficient 58 est 2 x 29, **29** autre constante universelle du problème (dans (**iv**)).

Si donc nous nous intéressions à $(d + 29)^2$, nous saurions, par une interprétation arithmétique de **II**. 4 (en prenant AC = d; CB = 29), que cela vaut :

$$d^2 + 29^2 + 2.\mathrm{Rect}\,(d, 29) = d^2 + 58d + 841,$$

avec **841** notre deuxième constante universelle ! Le problème est que dans (**E**) nous n'avons pas d^2, mais $11d^2$. Géométriquement, il est tout à fait évident (par quadrillage) que pour tout entier N, $(Nd)^2 = N^2d^2$, mais ici, 11 n'est pas un carré parfait. Mais nous pouvons utiliser une astuce : multiplier notre égalité (**E**) par 11. Géométriquement cela revient à poser AC = 11d et BC = 29. On obtient :

$$11^2d^2 + 58\text{x}11d = 212 \text{ x } 14 \text{ x } 11 \text{ ou encore :}$$

$$(11d)^2 + 2.29.11d = 212 \text{ x } 154 \ (\mathbf{E'}).$$

Nous retrouvons ainsi notre première constante universelle **154** et le membre de droite de l'équation (**E'**) n'est rien d'autre que l'opération à effectuer dans la première étape de la procédure. Quant au membre de gauche, on voit, en utilisant une version légèrement généralisée de **II**. 4, qu'il s'agit de $(11d+29)^2 — 841$ puisque :

$$(11d+29)^2 = (11d)^2 + 2.29.11d + 29^2 = (11d)^2 + 2.29.11d + 841.$$

On comprend alors immédiatement les étapes (**ii**) et (**iii**) : en ajoutant (universellement) 841 à 212 x 154, on a calculé en fait :

$$(11d+29)^2 — 841 + 841 \text{ soit } (11d+29)^2.$$

En prenant le côté carré, l'étape (**iii**) donne donc 11d + 29. D'où l'étape (**iv**) qui détermine 11d par retranchement universel de 29, puis (**v**) qui fournit bien d en prenant le 11^e ! Puisque 7C = 22d on en déduit C = (22/7).d; c'est facile à calculer quand d vaut 14 ou 7. Enfin, puisque 14S = 11T(d), S vaut (11/14).T(d), ce qui est aussi facile à calculer.

L'auteur du problème connaissait donc le contenu de *La mesure du cercle* d'Archimède et l'exercice est destiné à vérifier que l'étudiant connaît les procédures de calcul issues des résultats fondamentaux que le traité archimédien contient, procédures qui ont été exposées préalablement aux

§§ 39-40,44-45 de notre recueil de problèmes. En outre l'étudiant devait savoir transformer la donnée du problème en une expression de la seule "inconnue" d, ce que l'on peut écrire :

$$d + C + S = 212 \Leftrightarrow (11d)^2 + 2.29.11d = 212 \times 154.$$

L'enseignement des mathématiques montre que cette étape de « mise en équation » n'est pas toujours la plus simple. L'auteur de la section 24 des *Geometrica* a cependant bien préparé le terrain puisqu'on explique, au problème 36 (§ 43), comment résoudre un problème de "mélange linéaire", donc plus simple : on mélange (seulement) le diamètre et le périmètre d'un cercle : cela fait 58, puis on veut les séparer. La procédure peut être synthétisée ainsi :

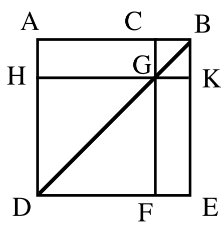
$$58 \rightarrow 7\text{x}58\ [7.(d + C)] = 406 \rightarrow (1/29).406\ [(1/29)(7.(d + C))] = 14.$$
$$\text{D'où } d = 14;\ C = 44.$$

Cela dit, pour résoudre nos problèmes 38-39, l'étudiant devait aussi disposer d'une procédure de résolution de certaines "équations du second degré" (sans doute dans une formulation géométrique), celles de la forme : $d^2 + M.d = K$ (**E"**) où M, K sont des nombres, procédure donnée par la méthode dite de « complétion du carré » et mise en œuvre ici dans les étapes (**ii**)-(**iv**). Disons un mot sur la méthode de complétion du carré.

Pour résoudre $d^2 + M.d = K$ (**E"**), par référence à l'identité de **II**. 4, puisque $[d + (M/2)]^2 = d^2 + 2.(M/2).d + (M/2)^2$, on écrit :

$$d^2 + M.d = d^2 + 2.(M/2).d = [d + (M/2)]^2 - (M/2)^2.$$

Géométriquement on dira que l'on transforme $d^2 + M.d$ en un gnomon T(d) + 2.Rect(M/2, d), où T(d) désigne le carré décrit sur d et 2.Rect(M/2, d) ses deux compléments par rapport au carré décrit sur d + (M/2). Sur la figure ci-dessous (Eucl. **II**. 4), cela revient à compléter le gnomon constitué du carré DHGF et des rectangles ACGH, EFGK par le carré BCGK :



D'où l'algorithme de résolution :

$$M \rightarrow (M/2) \rightarrow (M/2)^2 \rightarrow (M/2)^2 + K \rightarrow \sqrt{[}K + (M/2)^2] = d + (M/2);$$
$$\text{D'où : } d + (M/2) - (M/2) = d.$$

Cette procédure est supposée connue dans la solution des problèmes N°38, 39 où elle est appliquée avec (M, K) = (58, 212), (58, 67(1/2) respectivement. Il faut donc espérer que le lecteur ait rencontré cette technique dans les problèmes antérieurs du recueil, si vraiment celui-ci avait bien comme finalité pédagogique l'apprentissage des procédures de calcul. Or, dans le problème N°3 de ladite section (Annexes, 2b) on trouve le problème suivant :

> « Une aire carrée ayant l'aire plus le périmètre : 896 pieds.
> Séparer l'aire du périmètre ».

Il s'agit d'un cas particulier de (**E"**) avec M = 4, une fois reconnu que, pour un carré, le périmètre P vaut 4 fois le côté C. On doit donc résoudre :

$$C^2 + P = C^2 + 4C = 896.$$

La procédure de résolution indiquée peut être transcrite ainsi :

$4 \rightarrow (1/2).4 = 2$	$M \rightarrow (1/2).M$
$2 \times 2 = 4$	$(1/2).M \times (1/2).M = (M/2)^2$
$4 + 896 = 900$	$(M/2)^2 + K = [C + (M/2)]^2$
$\sqrt{900} = 30$	$\sqrt{[(M/2)^2 + K]} = C + (M/2)$
$4 - 2 = 2$	$M - (M/2) = (M/2)$
$30 - 2 = 28$	$C + (M/2) - (M/2) = C$

Notre exemple illustre ce que nous avons dit, à la suite de Jim Ritter et Karine Chemla, à propos de l'un des aspects des mathématiques algorithmiques : l'utilisation d'un algorithme préalablement exposé dans le recueil comme sous-algorithme d'une autre procédure, ici la possibilité de rattacher les problèmes N°38-39 aux N°3, 33, 36, 37 de la Section 24 des *Geometrica.* Particularité grecque : le traité suggère explicitement le rapprochement des N°3, 36, 37-39, non pas au niveau de la procédure (c'est au lecteur de s'en apercevoir), mais dans le libellé même des énoncés quelque peu paradoxaux : séparer des éléments de genre ou d'espèce différents (ligne droite, ligne courbe, aire) de figures simples (carré, cercle). On pourrait y voir une manifestation de la perversité des enseignants de mathématiques reconnue depuis longtemps. Peut-être s'agit-il plus simplement d'un effet du primat absolu de la figure géométrique dans l'ensemble des mathématiques grecques, y compris celles de type algorithmique !

III. Deux exemples des *Arithmétiques* de Diophante

J'ai retenu seulement 2 ou 3 des quelques 260 problèmes conservés du traité diophantien (dont 189 en grec) pour montrer :
(**i**) le caractère algorithmique du traité diophantien, cette fois, dans le domaine du nombre.

(**ii**) L'existence d'une structure formelle pour les problèmes les plus sophistiqués qui n'est pas sans analogie avec ce qu'on trouve pour les Propositions euclidiennes, structure qui renvoie à un souci pédagogique, au demeurant explicité dans la préface de Diophante, ainsi qu'à la recherche d'un certain niveau de généralité logique.
(**iii)** Une influence des mathématiques démonstratives sur la rédaction diophantienne, même si l'Auteur des *Arithmétiques* ne se soucie pas de donner des justifications démonstratives, au sens euclidien du terme, pour les procédures qu'il utilise.
(**iv**) Ces problèmes du Livre "IV"[13] prouvent aussi qu'il ne s'agit pas de simple bricolage empirique, mais que Diophante maîtrise un certain nombre de méthodes dont certaines ont apparemment un strict caractère algorithmique. Ceci a manifestement conduit un certain nombre de savants à croire que Diophante était l'"inventeur" de l'algèbre.

1. Les problèmes GIV. 19-20

Je commencerai par le problème GIV. 20 (Annexes, 3c) :

> « Trouver quatre nombres de telle manière que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté d'une unité, forme un carré ».

De fait sa solution se divise en deux parties :

- la première consiste à déterminer *trois* nombres satisfaisant les conditions de l'énoncé. On voit qu'il s'agit en fait de reproduire, en abrégé et avec quelques variantes significatives, le résultat qui a été obtenu dans la deuxième partie du problème immédiatement antérieur :

> « Trouver trois nombres dans l'indétermination de telle manière que le produit de deux quelconques d'entre eux, accrue d'une unité, forme un carré ».

Celui-ci est donc ce que nous appellerions un lemme si nous étions dans le contexte des mathématiques démonstratives. Ici, nous dirons qu'il s'agit d'un sous-problème. A cause de cette fonction, il a une particularité intéressante : il est libellé « dans l'indétermination » (ἐν τῷ ἀορίστῳ). Autrement dit, sa solution s'exprimera en termes d'arithmes, et non pas à l'aide de nombres déterminés comme c'est ordinairement le cas dans les problèmes des *Arithmétiques.* Ici, c'est-à-dire dans la deuxième partie de GIV. 19,

---

[13] Il est admis que les Livres conservés en traduction arabe et récemment découverts constituent les L. IV à VII des *Arithmétiques.* Il n'est donc plus possible de désigner les Livres conservés en grec et édités par P. Tannery sous les numéros IV à VI de cette manière. Dans ce qui suit j'utiliserai la notation GIV pour désigner le livre IV de l'édition du texte grec.

Diophante établit que les nombres x+2, x, 4x+4 seront solutions, quelle que soit la multitude des "unités" contenue dans l'arithmos "x".

• La seconde partie de GIV. 20 prend en considération le quatrième nombre cherché, en poursuivant la méthode exposée dans GIV. 19, c'est-à-dire en fixant la forme du carré égal au produit des premier et quatrième nombres, accru d'une unité, comme égal à $(3x+1)^2$.

Puisque le premier nombre est "x", il s'ensuit que le quatrième sera "9x+6". Reste à satisfaire les autres conditions que lui impose l'énoncé. Or (9x+6)(4x+4) + 1 (le produit des troisième et quatrième nombres, accru d'une unité) est toujours un nombre carré. Il s'agit en fait de $(6x+5)^2$. Il faut donc — et il suffit — que le produit des deuxième et quatrième nombres, (9x+6)(x+2), + 1 soit un nombre carré. Or ce nombre est « $9x^2+24x+13$ ». Diophante le construit comme un carré de la forme $(3x-4)^2$. Cette condition *imposée* lui permet en effet de se ramener, après *restauration* et *opposition,* à une égalité simple : 48x = 3. Diophante ne détaille plus à ce niveau du traité et indique simplement que l'arithme est donc 1/16. A partir de cette valeur, il peut trouver une solution déterminée au problème initialement posé.

Quelques remarques s'imposent.

(**i**) Quand Diophante utilise GIV. 19 dans GIV. 20, il considère le triplet ("x", "x+2", "4x+4") et non ("x+2", "x", "4x+4"). Cette inversion n'est pas le résultat d'une inattention ou d'une corruption. L'ordre "x+2", "x", "4x+4", dans la deuxième partie de GIV. 19, vient de la tentative manquée de la première partie, à partir du triplet ("x+2", "x", "9x+6"). De ce fait, le produit des deuxième et quatrième nombres, accru d'une unité, (9x+6)(x+2) + 1, dans GIV. 20, n'est autre que le produit des premier et troisième nombres, accru d'une unité, dans la première partie GIV. 19. Son évaluation a donc déjà été faite, ce qui permet à Diophante d'affirmer immédiatement, dans GIV. 20, qu'il s'agit de « $9x^2+24x+13$ ».

(**ii**) Dans la deuxième partie de GIV. 19, il s'est dispensé de vérifier que le produit des premier et troisième nombres, accru d'une unité, « $4x^2+12x+9$ », forme bien un carré. Manifestement il estime que cela résulte de l'analyse de la tentative manquée qui précède. Nous y reviendrons. C'est pour la même raison que dans GIV. 20, parmi les trois conditions restantes, deux sont automatiquement satisfaites : le produit des deuxième et troisième nombres, accru d'une unité, et le produit des troisième et quatrième nombres, accru d'une unité, forment des carrés. Diophante l'énonce seulement pour la dernière et ne comble donc pas le défaut de synthèse que nous avons observé pour la deuxième partie de GIV. 19.

(**iii**) Au niveau du vocabulaire, soulignons que les expressions "ἐν τῷ ἀορίστῳ", " ἐν τῇ ἀορίστῳ", "... ἀριθμοὺς ἀορίστους", "ἐν ἀορίστοις ἀριθμοίς" interviennent soit dans l'*énoncé* de lemmes (voir aussi les Lemmes pour GIV. 34, 35, 36), comme dans GIV. 19, soit, comme dans GIV. 20, en cours de procédure de résolution. Lorsqu'il y a N conditions à satisfaire, on résout le problème de manière indéterminée en en satisfaisant N - 1, puis on détermine l'arithme grâce à la dernière condition (voir aussi GIV. 16, 17, 21; GV. 18; GVI. 19). Le texte des *Arithmétiques* contient deux explications de l'expression "ἐν τῷ ἀορίστῳ" : l'une à la fin de IV. 19 (Annexes, 3b), l'autre[14], légèrement différente, à la fin du lemme pour GIV. 34. Il est peu vraisemblable qu'elles soient authentiques.

(**iv**) Que l'approche de Diophante soit algorithmique et qu'il n'y ait pas une interprétation géométrique sous-jacente à son raisonnement se voit dans le fait que le côté du nombre carré "auxiliaire" construit pour simplifier la dernière égalité dans GIV. 20, à savoir 3x-4, est négatif !! pour la valeur trouvée de l'arithme[15], x = 1/16. Si ledit côté l'intéressait vraiment en tant que côté d'une figure, il aurait dû prendre (4-3x). En fait il raisonne seulement sur l'écriture de ses trinômes.

(**v**) Il faut encore souligner le fait qu'un des traits caractéristiques de la méthode de Diophante consiste à construire les nombres cherchés, dans le problème posé, ou dans un problème auxiliaire soulevé en cours de résolution, de manière à ce que les deux manipulations que sont la *restauration* et l'*opposition* ramènent les conditions imposées par l'énoncé à des égalités ou équations les plus simples possibles, dont l'exemple le plus fréquent, en écriture modernisée, est du type : $ax^n = bx^{n-k}$. Pour s'en convaincre, il suffit de lire ce qu'il en dit lui-même, à la fin de sa préface[16] :

> « Après t'avoir expliqué les multiplications, les divisions des susdites espèces sont claires. Il est donc utile que celui qui aborde ce traité se soit exercé à la composition et au retranchement, et aussi à la multiplication des espèces, ainsi qu'à la manière d'ajouter des espèces existantes et manquantes non semblables en multitude à d'autres espèces, lesquelles sont elles-mêmes existantes, ou semblablement existantes et manquantes; enfin à la manière de retrancher d'espèces existantes et d'autres, manquantes, d'autres espèces, soit existantes, soit semblablement aussi existantes et manquantes.

---

14 [Diophantus, 1893], p. 278, l. 10-12 = [Diophante, 1959], p. 163).

15 Je dois cette remarque à Y. Thomaïdis qui, dans un travail à paraître dans *Archive for History of Exact Sciences,* intitulé « A framework for defining the generality of Diophantos' methods in *Arithmetica* », fait beaucoup d'autres observations pénétrantes sur la méthode de Diophante.

16 [Diophantus, 1893], p. 14, l. 1-23.

> Après cela, s'il résulte d'un certain problème que certaines espèces sont égales à des mêmes espèces, mais non semblables en multitude, il faudra retrancher de chaque côté les semblables des semblables jusqu'à ce que l'on obtienne une seule espèce égale à une seule espèce. Et si dans l'une quelconque des expressions, ou bien dans chacune d'entre elles, se trouvent des espèces manquantes, il faudra ajouter ces espèces manquantes de part et d'autre jusqu'à ce que les espèces de chaque côté deviennent existantes, et, de nouveau, retrancher les semblables des semblables, jusqu'à ce qu'une espèce et une seule subsiste de chaque côté.
>
> Applique cela avec adresse aux expressions des propositions, autant que cela est possible, jusqu'à ce qu'il subsiste une seule espèce égale à une seule espèce. Je te montrerai plus tard comment l'on résout le cas où il reste deux expressions égales à une seule ».

(vi) La fin de cette citation nous écarte un peu de notre analyse des problèmes GIV. 19-20, mais elle est suffisamment intéressante pour justifier un petit excursus. Elle suggère que Diophante entendait exposer les algorithmes de résolution de ce que nous appelons « équation du second degré » ou du moins des trois formes canoniques énumérées par les algébristes arabes :

$$\text{(I) } ax^2 + bx = c \text{ ; (II) } ax^2 = bx + c \text{ ; (III) } ax^2 + c = bx.$$

Diophante fait allusion à la résolution de telles équations dans GIV. 31, 39 (II), GV. 10 (III), GVI. 6 (I), 22 (III). Il faut donc en conclure que ces résolutions étaient expliquées dans un (ou des) Livre(s) non conservé(s), mais antérieur(s) à GIV. Ce qui implique[17] que les Livres GIV-VI ne sont pas consécutifs à ceux conservés en arabe.

Pour ma part, je conjecture que ce sont les Livres XI à XIII de la rédaction originale. Il est probable qu'il a existé un archétype où les 13 Livres étaient répartis en 2 volumes à cause de la longueur du traité, comme dans le cas des *Éléments* d'Euclide pour lesquels la coupure passe au milieu du Livre X. Cet archétype s'est trouvé mutilé à la fin du premier volume, perdant, dans mon hypothèse, les Livres VIII-X (cf. le cas comparable de la version arabo-latine d'Adélard de Bath des *Éléments* dans laquelle il manque le Livre IX et la première partie du Livre X). Les traducteurs arabes ont apparemment eu accès à ce qui restait du seul premier volume (Livres I à VII). La détérioration a dû se poursuivre dans cet archétype, ou ses copies, car les Byzantins n'ont pu transmettre que les trois premiers et les trois derniers Livres (que les Arabes semblent n'avoir pas connus).

---

[17] Malgré [Sésiano, 1982], p. 68, n. 44 et pp. 76-84.

(**vii**) Revenons au problème GIV. 19, précisément à la fin de la première partie, quand Diophante analyse les raisons de l'"échec" de sa première tentative. Il affirme :

> « Nous voulons donc que leur quadruple produit accru de 1 unité, forme un carré. Mais par ailleurs, le quadruple produit de tout couple de nombres, accru du carré de leur différence, forme un carré; donc, si nous établissons que le carré de leur différence est 1 unité, leur quadruple produit, accru de 1 unité, forme un carré ».

Or tout lecteur d'Euclide sait que :

> « Si une ligne droite est coupée au hasard, quatre fois le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments, pris avec le carré sur le segment restant est égal au carré décrit sur la droite entière et le segment susdit, comme sur une seule droite » (II. 8),

et donc, dans une interprétation arithmétique, « quatre fois le produit de deux nombres, augmenté du carré de leur différence, est égal au carré de leur somme ».

Au demeurant, dans le problème I. 30, Diophante avait écrit :

> « Trouver deux nombres de telle manière que leur différence et leur produit forment des nombres donnés.
> Il faut toutefois que le quadruple produit des nombres, accru du carré de leur différence, forme un carré; et ceci est aussi une condition formelle »[18].

On appelle "prosdiorismos"[19] la condition énoncée comme nécessaire à la résolution du problème, introduite par « il faut que … ». Ce genre de formules a attiré l'attention des commentateurs à cause de l'expression quelque peu énigmatique qu'ajoute Diophante : « ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν », ce que j'ai traduit : « et ceci est aussi une condition formelle », mais que Ver Eecke rend par : « chose qui est aussi figurative ». Celui-ci soutient la thèse que l'expression en question renvoie à une figure géométrique[20]. Si on le suit, d'après ce que nous venons de remarquer, il pourrait s'agir de celle de la Proposition II. 8 des *Éléments.* Cette hypothèse se justifie à partir des autres occurrences de la même formule, par exemple dans le problème I. 27 (Annexes, 3a) pour qualifier, là aussi, le prosdiorismos[21] :

---

[18] [Diophantus, 1893], p. 66, l. 1-6.

[19] V. Problème I. 14 [Diophantus, 1893], p. 36, l. 6.

[20] [Diophante, 1959], p. 37, n. 6. M. Caveing ([Caveing, 1997], pp. 389-393) le suit sur ce point. A noter toutefois que Ver Eecke considère la remarque comme le résultat d'une glose marginale, interpolée ultérieurement dans le texte.

[21] [Diophantus, 1893], p. 60, l. 23—p. 62, l. 2.

> « Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres ».

Et cette condition peut, elle aussi, être rapportée à une interprétation arithmétique d'une Proposition du Livre II des *Éléments,* à savoir II. 5. L'expression se trouve encore dans le problème I. 28 où le prosdiorismos correspond cette fois à une interprétation arithmétique de l'une ou l'autre des Propositions II. 9-10[22] ! La thèse susdite est donc très séduisante.

Toutefois, elle ne semble pas compatible avec les occurrences du terme "muhayyah'" qui traduit l'adjectif "πλασματικόν" dans les livres conservés en arabe seulement, en l'occurrence dans les prosdiorismoi de IV. 17, 19; V. 7, que Ver Eecke ne pouvait pas connaître. Sésiano traduit "constructible" en considérant que cela s'applique aux problèmes. Ce qui maintient peut-être l'idée d'une interprétation géométrique. Ce n'est pas le cas de Rashed qui préfère : "convenablement déterminé". Il l'applique à un nombre dans IV. 17, au problème lui-même dans IV. 19 et V. 7. Leurs commentaires respectifs ne tranchent pas vraiment sur la manière dont il faut comprendre l'adjectif "πλασματικόν" ou le terme arabe qui le traduit.

Il me semble que celui-ci doit être compris en fonction des usages fréquents que Diophante fait du verbe apparenté "πλάσσειν" = "façonner", lorsqu'il s'agit de former certains nombres comme des carrés. La clause se réfère alors, semble-t-il, à la possibilité ultérieure d'extraire une racine carrée (le "côté" carré en grec), autrement dit au fait de réussir une quadrature "numérique". On peut considérer qu'il y a là une connotation géométrique, mais elle est beaucoup moins forte que ne le suggérait la thèse de Ver Eecke. D'où ma traduction, guère plus précise que ne l'est le grec.

(**viii**) Malgré cette réserve, il me semble néanmoins très probable qu'il a existé, dès l'époque de Diophante et peut-être avant, une interprétation numérique de certaines Propositions du Livre II des *Éléments.* De fait, une telle version arithmétique des 10 premières Propositions du Livre II existe, mais elle est très tardive et attribuée au moine Barlaam[23]. On peut toutefois se demander si quelque chose du même genre n'avait pas déjà circulé dans l'Antiquité.

Nous savons que le plus ancien commentateur des *Éléments* connu de nous, Héron d'Alexandrie, avait proposé une version alternative des Propositions II. 2-10, que l'on qualifie souvent de *quasi* algébrique car, à la différence des preuves euclidiennes, elle ne construisait pas les figures géométriques évoquées dans ces énoncés (carrés, rectangles) et, de

---

[22] V. [Euclide, 1990], p. 374, n. 31.

[23] Elle a été éditée par Heiberg. V. [*Euclidis Elementa,* 1977], vol. V, 2, Appendix scholiorum IV, pp. 351-362.

surcroît, introduisait une structure déductive dans un ensemble de résultats qui en était initialement dépourvu[24]. Cela dit, si les formulations que transmet le commentateur persan an-Nayrîzî (à qui nous devons ces informations) sont fidèles à Héron, celui-ci s'exprimait de manière géométrique et non pas arithmétique. Il maintenait même les figures pour la Proposition II. 1. Mais, pour les suivantes, ses preuves alternatives introduisaient un diagramme linéaire du genre de ceux que l'on trouve dans les Livres arithmétiques dans lesquels, même lorsqu'il s'agit de représenter des nombres carrés ou cubes, Euclide utilise des segments de droite. Cette altération héronienne constituait en quelque sorte un premier pas, et il n'est pas impensable qu'à une étape ultérieure on ait reformulé ces Propositions 1-10 dans un langage cette fois arithmétique.

Toujours pour appuyer l'idée qu'il a existé une version arithmétique des Propositions II. 1-10, j'invoquerai encore un témoignage de Proclus. Quand celui-ci tente de donner des exemples de résultats appartenant à la « mathématique commune », c'est-à-dire tantôt ce qui est "commun" à la fois à l'arithmétique et à la géométrie, tantôt ce qui est antérieur à la distinction de ces deux genres, il mentionne, entre autres, les théorèmes de section qu'Euclide a établis dans son livre II à l'exception du partage en extrême et moyenne raison[25], autrement dit nos Propositions II. 1-10 !

Qui plus est, si une telle version arithmétique a existé, on pourrait même envisager l'hypothèse qu'elle a interféré avec la transmission du texte euclidien. C'est en tout cas ce que suggèrent certaines formulations divergentes (précisément arithmétiques) de la traduction arabe du Livre II rapportée à al-Hajjâj. Quoi qu'il en soit, la formulation des prosdiorismoi constitue un exemple, parmi d'autres[26], de l'influence, directe ou indirecte, des mathématiques démonstratives sur la rédaction diophantienne.

2. Le problème GIV. 28

Le problème GIV. 28 s'énonce :

> « Trouver deux nombres de telle manière que leur produit, augmenté ou diminué de leur somme, forme un cube ».

Son intérêt est triple :

---

[24] V. [Euclide, 1990], p. 368, n. 15.

[25] V. [Procli Diadochi, 1873], p. 60, l. 16-19. Cf. *infra,* conclusion à propos de la mathématique "commune".

[26] V. [Klein, 1992], pp. 135-136 à propos des liens entre Diophante et Euclide pour ce qui concerne la terminologie.

a. Il présente, à l'égard de la Proposition I. 27 (Trouver deux nombres de telle sorte que leur somme et leur multiplication produisent des nombres donnés; Annexes, 3a), le même type de relation entre procédure et sous-procédure, dont nous venons de parler pour GIV. 19-20, et ce à deux reprises (Annexes, 3d) :

(**i**) à la fin de la première tentative de solution (« trouver deux nombres dont la somme forme 28 unités, et dont le produit est 36 unités »);
(**ii**) en fin du problème avec d'ailleurs une référence textuelle explicite au Livre I : « Bien que cette démonstration (ἡ ἀπόδειξις) ait été préalablement indiquée (προδεικνύναι) dans le premier Livre, elle sera aussi indiquée (δειχθήσεται) maintenant, à l'occasion de ce problème ».

Ces références sont suffisamment rares dans les textes mathématiques grecs pour que celle-ci soit relevée, même si l'on peut toujours avoir des doutes quant à son authenticité.

b. L'existence d'une « autre solution », fondée sur l'identité :

« $x^3 = x.(x^2 - x) + [x + (x^2 - x)]$ »,

est un autre trait partagé avec la mathématique démonstrative qui pratique le jeu des preuves alternatives. Généralement elles ne sont pas authentiques mais dues à des commentateurs ou à des lecteurs[27]. Il pourrait en être de même ici.

c. Enfin et surtout, le problème GIV. 28 possède une structure nettement plus complexe que nombre des problèmes précédents, structure cependant assez caractéristique des portions les plus avancées de l'ouvrage.

Après l'énoncé général du problème, Diophante propose une première instanciation : les cubes seront 64 et 8. Les conditions de l'énoncé sont transformées dans le cadre de cette instanciation particulière, de même qu'Euclide introduit une figure particulière de position donnée et désignée par un lettrage. Ici elles conduisent très facilement à une ré-énonciation du problème, correspondant au "diorismos" euclidien :

« Nous sommes donc amenés à trouver deux nombres dont la somme forme 28 unités, et dont le produit est 36 unités »,

ce que l'on sait résoudre depuis I. 27. La méthode est appliquée et conduit à une équation "simple" : « $x^2 = 160$ ». Malheureusement 160 n'est pas un carré parfait et Diophante n'admet que des solutions numériques. Nous sommes donc dans une impasse — une impasse voulue par Diophante en imposant le choix (64, 8) — qu'il faut analyser. D'où l'insertion d'une séquence de type analytique pour comprendre d'où sort 160.

---

[27] Pour le cas des *Éléments* d'Euclide, voir [Vitrac, 2004].

On voit que 160 = $(56/4)^2$ - 36, autrement dit :

$$160 = [\tfrac{1}{4}(\text{cube n°1} - \text{cube n°2})]^2 - \tfrac{1}{2}.(\text{cube n°1} + \text{cube n°2}).$$

Diophante se ramène donc à un *problème auxiliaire* qui s'énonce :

> « Trouver deux cubes de telle manière que le quart de leur excédent, multiplié par lui-même, et diminué de la moitié de leur somme, forme un carré ».

D'où une nouvelle instanciation, concernant cette fois les deux cubes cherchés. Sachant que l'on aura à calculer leur somme et leur différence pour aboutir à une égalité simple, Diophante choisit des cubes de la forme $(y+1)^3$, $(y-1)^3$. J'utilise la lettre "y" pour désigner l'inconnue auxiliaire. Mais il faut remarquer que Diophante l'appelle toujours l'arithme, « nombre (provisoirement) indéterminé » et utilise la même abréviation que pour l'"inconnue" initiale que j'ai notée "x", laquelle restera indéterminée plus longtemps que "y". L'algorithmique de Diophante n'est pas une algèbre avec plusieurs "inconnues" !

Il regarde alors comment s'exprime le problème auxiliaire dans cette configuration particulière. Après avoir tout multiplié par 4 pour se dispenser des fractions, il obtient :

« $9y^4 + 6y^2 + 1 - (4y^3 + 12y)$ doit être un carré ».

Comme dans le problème GIV. 20, Diophante forme ce carré d'une manière particulière en vue d'obtenir une égalité simple. C'est dans ces sortes de "constructions" que Diophante fait preuve d'une grande astuce calculatoire. Ici il choisit le carré $(3y^2 + 1 - 6y)^2$. Clairement cela "simplifiera" les termes en y^4, en y et le terme constant ici égal à l'unité. Resteront donc seulement des y^2 et des y^3, soit une équation simple, en l'occurrence après *restauration* et *opposition* : $32y^3 = 36y^2$. Et donc y = 9/8. Dès lors il suffit de reprendre dans l'ordre inverse ("synthèse") les différentes étapes suivies pour trouver d'abord les deux cubes :

$$(y+1)^3 = 4913/512 \text{ et } (y-1)^3 = 1/512.$$

Le problème auxiliaire est donc résolu. Revenant au problème initial il faut à nouveau proposer une instanciation, non plus avec 64 et 8, mais avec les cubes que l'on vient de déterminer. Le nouveau diorisme correspondant est donc :

> « Trouver deux nombres dont la somme forme (2456/512) unités, et dont le produit est (2457/512) unités ».

GIV. 28 inclut alors une seconde application particulière du problème I. 27, elle-même ramenée à l'équation simple : $262\ 144z^2 = 250\ 000$. D'où z = 500/512 et les deux nombres cherchés seront 1728/512, 728/512.

En combinant ce que nous avons vu dans les problèmes GIV. 20, 28, nous pouvons dégager une structure du problème diophantien partiellement comparable — d'un point de vue formel — au schéma en six parties que Proclus rapporte pour les Propositions d'Euclide : énoncé (πρότασις), instanciation (ἔκθεσις), détermination (διορισμός), construction (κατασκευή), démonstration (ἀπόδειξις), (double) conclusion (συμπέρασμα)[28]. Bien entendu, la correspondance n'est pas complète : elle vaut surtout pour certaines étapes (énoncé, instanciation[29], diorisme, construction) et, chez Diophante comme chez Euclide, l'une ou l'autre peut ne pas exister dans telle unité textuelle.

Ce parallélisme partiel avec Euclide a été perçu — et donc amplifié — à un certain moment de la transmission du texte diophantien car les problèmes des Livres IV-VII (conservés seulement en arabe) possèdent une conclusion particulière semblable à ce que l'on trouve dans les problèmes euclidiens[30]. Ils présentent même, à la suite de l'ecthèse numérique, une reformulation instanciée du problème, non transformée (Cf. l'étape **4** du tableau), tout à fait analogue à la détermination euclidienne[31]. Selon J. Sésiano, ces enrichissements ont connu plusieurs phases (au moins deux), dès l'Antiquité, la première étant peut-être à rapporter au Commentaire de la célèbre mathématicienne Hypatie[32].

Diophante n'inclut rien de comparable à l'étape proprement démonstrative (ἀπόδειξις) d'Euclide, au sens axiomatico-déductif du terme, c'est-à-dire synthétique. Il utilise pourtant ce terme et les verbes apparentés ("δεικνύναι"; "προδεικνύναι").

N.B. : Dans le tableau qui suit, je n'ai fait apparaître que les problèmes GIV. 20, 28 pour des raisons de mise en page. Le lecteur peut le compléter avec I. 27 ou IV. 19. "+" signifie "existe"; "—" signifie "n'existe pas".

---

[28] V. [Procli Diadochi, 1873], p. 203, l. 1—p. 207, l. 25. En fait les conclusions sont souvent absentes des manuscrits euclidiens. Selon Proclus, on doit avoir une conclusion particulière formulée dans les termes du diagramme instancié introduit au cours de l'ecthèse et, pour le cas des théorèmes, en outre, une conclusion générale qui n'est rien d'autre que l'énoncé, auquel on ajoute la conjonction "donc" puis l'expression « ce qu'il fallait démontrer ». Dans les problèmes (des Livres géométriques) la conclusion particulière est immédiatement suivie de la formule : « ce qu'il fallait faire ».

[29] Diophante utilise effectivement le verbe "ἐκτιθέναι" dans l'instanciation de certains problèmes. V. par exemple II. 30, 31; III. 19; GIV. 6, 7; GV. 3, 4, 8, 21. Au demeurant le style des *Éléments* (du moins tels qu'ils nous sont parvenus) est nettement plus formulaire que celui de Diophante.

[30] Cf. *supra,* note 28.

[31] V. [Sésiano, 1982], pp. 49-50 et 69-73.

[32] V. [Sésiano, 1982], pp.71-72.

		20	28
1	**Énoncé général** : Trouver N nombres vérifiant des conditions $(C_i)_{1 \leq i \leq k}$	+	+
2	**Prosdiorismos** éventuel	–	–
3	**Instanciation** (ecthèse) en nombres spécifiés	+	+
4	**Détermination** : transformation de **1** en fonction de **3** → Nouvelle formulation instanciée du problème en fonction de **3**	–	+
5	**"Construction"** : introduct. de l'arithme en fonction de **1**-**2** ou **3**	+	+
6	**Analyse :** On cherche à satisfaire l'une des $(C_i)_{1 \leq i \leq k}$ restantes. Soit on obtient directement une équation (on passe alors à **7**.)[33], soit on aboutit à une condition en termes d'espèces. On introduit alors une : 6^{bis}. **Construction auxiliaire** ∅ on obtient une équation.	– +	– +
7	**Restauration et opposition** : on aboutit à une équation simplifiée souvent du type : « $ax^n = bx^{n-k}$ $(1 \leq k \leq 6)$ » (**E**)	+	+
8	**a. Résolution de (E)** : détermination de l'arithme, ou **b. On constate que (E) n'est pas résoluble**	+ –	– +
9	**a. Synthèse :** résolution du problème **b. Analyse de l'impossibilité de résoudre (E)** → **Problème auxiliaire**	+ –	– +
10b à 13b	**Étapes type 5–6–7–8a pour le problème auxiliaire** (13b → détermination de l'arithme auxiliaire)	–	+
14b	**Synthèse :** résolution du problème auxiliaire	–	+
15b	**Nouvelle instanciation** (ecthèse) en nombres spécifiés pour remplacer **3**;	–	+
16b	**Nouvelle détermination** en fonction de **15b**.	–	+
17b à 20b	**Étapes type 5–6–7–8a pour le problème initial** (20b → détermination de l'arithme)	–	+
21b	**Synthèse :** résolution du problème initial	–	+

[33] C'est le cas par exemple dans le problème I. 27.

Chez Euclide, le premier signifie "démontrer", mais son sens ordinaire est "montrer", "indiquer" et c'est peut-être ainsi que l'entend Diophante, par exemple dans la formule de renvoi à I. 27 incluse à la fin de GIV. 28, déjà citée plus haut, en admettant qu'elle soit bien authentique. Quant au substantif " ἀπόδειξις", il l'utilise, à plusieurs reprises, à la fin de certains problèmes[34], dans une expression « καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά », que Ver Eecke traduit : « et la preuve est évidente ». En fait il semble bien que Diophante entende " ἀπόδειξις" au sens de synthèse — Cf. l'étape **9a** dans le tableau — et l'expression en question signifie que cette synthèse est évidente, formule que l'on trouve d'ailleurs assez souvent dans les quelques spécimens de preuves par analyse et synthèse de la tradition géométrique qui sont parvenus jusqu'à nous.

Clairement, il n'y a pas de doutes que la démarche de Diophante inclut une dimension analytique, en particulier quand il est amené à analyser les raisons de l'échec d'une première instanciation (étape **9b**). On a parfois parlé d'une méthode algorithmique dite de « fausse position ».

Cela ne paraît pas adéquat. Il ne s'agit pas de prendre une solution provisoire, arbitraire, d'effectuer les calculs imposés par les conditions de l'énoncé puis de trouver la "vraie" solution par proportionnalité, comme dans les usages habituels de ladite méthode[35]. Ici, la première instanciation ne fonctionne vraiment pas. Diophante parvient à la "bonne", qu'il s'agisse d'une instanciation numérique, comme dans GIV. 28, ou dans l'indétermination, comme dans GIV. 19, seulement à l'issue de la résolution d'un problème auxiliaire (étapes **10b-14b**). Il s'agit donc plutôt d'une démarche de type analytique, à l'intérieur d'une phase elle-même globalement analytique qui s'achèvera avec la détermination de l'arithme associé au problème initial. Ce souci tient évidemment à la particularité du domaine concerné, l'"arithmétique", qui impose que l'on se limite à des quantités numériques (néanmoins rationnelles et pas seulement entières). Mais ces explications sont surtout à mettre en rapport avec l'intention pédagogique de Diophante et l'ambition (légitime) de montrer qu'il ne trouve pas les solutions "par hasard", mais d'une manière particulièrement habile[36].

La première partie de GIV. 19 permet à ce sujet de souligner encore deux ou trois choses :

---

34 V. I. 1, 12, 16, 34. II. 5; III. 18, 21; GIV. 3, 7, 12, 13, 32, 33, 36, 38, 39; GV. 6.

35 Cf. l'extrait du papyrus d'Akhmim, Annexes, 1.

36 D'où l'utilisation du verbe « Φιλοτεχνάζειν = pratiquer avec adresse, avec art » à la fin de l'extrait de la préface que j'ai cité plus haut.

• La première instanciation proposée, en partant des conditions :

$$X_1X_2 + 1 = (x + 1)^2,\ X_2X_3 + 1 = (3x + 1)^2,$$

(X_1, X_2, X_3) désignant les trois nombres cherchés et "x" l'arithme) est délibérément fausse puisque Diophante prétend montrer qu'il faut prendre les carrés de quantités d'arithmes successives, accrue d'une unité.

• La visibilité du problème auxiliaire est moins nette que dans GIV. 28 parce qu'on raisonne ici dans l'indétermination. Il n'y a donc pas la possibilité d'introduire un arithme auxiliaire "y" (étape **10b**). Il faudrait que Diophante considérât quelque chose comme un y = f(x) (substitution d'inconnue). D'où une formulation plus embarrassée, qui se marque, dans ma traduction, par l'ajout du terme "quantité" :

> « Dès lors, nous voulons que le double [d'une quantité] d'arithmes, multiplié par le double [d'une quantité] d'arithmes, accru de 1 unité, forme un carré ».

• Du fait que la distinction des deux problèmes (principal et auxiliaire) reste implicite, Diophante s'exprime comme s'il avait trouvé une condition nécessaire pour la résolution du problème principal :

> « Il *faut* donc former des carrés à partir d'arithmes, prises successivement, accrus de 1 unité »,

alors que son analyse n'a apparemment produit qu'une condition suffisante pour la solution du problème auxiliaire.

IV. Algorithmique et algèbre

Il est temps de tirer quelques conclusions à partir de notre étude des extraits de Héron et de Diophante. Au-delà de la distinction « géométrie *versus* arithmétique », leurs démarches présentent quelques points communs : il s'agit de problèmes calculatoires construits sur l'opposition entre « ce qui est donné » et « ce qui est cherché ». Bien entendu ceci n'est pas suffisant pour parler d'algèbre, car cela vaut aussi pour le problème de construction dans la géométrie démonstrative.

Autres propriétés que partagent nos deux collections d'extraits :

• Nos deux auteurs utilisent la relation « procédure \ sous-procédure » pour structurer leurs exposés, laquelle est un peu l'analogue de la relation « lemme \ théorème » dans la géométrie démonstrative. L'une et l'autre de ces deux relations imposent un ordre.

• Ils ne se préoccupent pas de justifier leurs procédures. Cela dit, il est également très clair que, chez l'un comme chez l'autre, il y a des connaissances impliquées.

J'ai suggéré que Diophante connaissait, entre autres, une version arithmétique d'une partie du Livre II des *Éléments*; cela reste une conjecture, mais il me paraît difficile de nier que l'inventeur des problèmes de la Section 24 des *Geometrica* maîtrisait les résultats de *La mesure du cercle* d'Archimède. Cette existence de connaissances impliquées, au moins pour celui qui compose les recueils de problèmes, est un trait important des mathématiques algorithmiques grecques et on ne doit pas le perdre de vue lorsque l'on cherche à évaluer les mathématiques égyptiennes ou babyloniennes. Simplement, dans le cas grec, ces connaissances présupposées sont bien plus faciles à identifier.

Quant à ce qui différencie nos deux auteurs, nous venons de voir ce qui résulte de la distinction fondamentale entre géométrie et arithmétique combinée au fait que Diophante se propose de trouver des solutions *numériques,* à savoir : l'introduction des prosdiorismoi et ce que j'ai caractérisé comme l'analyse d'instanciations non effectives (étapes **9b-14b** du tableau). Une autre différence réside dans la part prépondérante accordée à l'analyse chez Diophante, à la seule "synthèse" dans les problèmes des *Geometrica.*

Il faut aussi souligner que l'habilité calculatoire dont Diophante fait preuve dans les étapes que j'ai appelées, par analogie, "construction auxiliaire" (étape **6**$^{\text{bis}}$) suppose une familiarité avec les calculs portant sur des expressions comportant l'"arithmos" — ce que nous écririons $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ — et leurs carrés, leurs cubes. En raisonnant à la manière de Borgès, on peut y voir une préfiguration d'un calcul sur les plus simples des polynômes. En outre, les transformations successives des égalités dans les procédures mettent en jeu deux manipulations qu'il est bien légitime de rapprocher de la restauration et de l'opposition (al-gabr wa-l-muqâbala) des algébristes arabes. Le fait qu'il ne se contente pas de les pratiquer en cours de résolution des problèmes (étape **7**), mais qu'il en souligne l'importance méthodologique à la fin de sa préface témoigne de la réflexivité de sa démarche. Il n'y a pas là d'artefact "ethnologique" de la part des historiens modernes.

Plus généralement on peut dire que la composition diophantienne entraîne une thématisation *explicite* des notions de "terme" (= espèce, εἶδος), d'"expression" dans une égalité (ὑπόσατσις), et précisément, de la notion même d'"équation". Comme je l'ai relevé ailleurs[37], Diophante est le premier mathématicien grec conservé à utiliser le substantif "égalité" (ἰσότης, ἴσωσις), lui donnant en quelque sorte le statut d'un "objet" mathématique.

---

[37] V. [Euclide, 1990], p. 505.

Je crois donc avoir donné un certain nombre d'explications plutôt convaincantes pour justifier l'idée que les *Arithmétiques* de Diophante sont, comme le disaient les savants arabes, un traité d'algèbre. Et pourtant dans l'ensemble de ma présentation, j'ai constamment parlé de l'algorithmique de Diophante, ou de Héron, et non de leur algèbre. Querelle de mots ? Snobisme ? Je ne le crois pas et c'est ce que je voudrais justifier maintenant.

1. Le cas de Diophante

Je n'ai pas souligné l'existence du système d'abréviations introduit par Diophante dans sa préface, système qui, pour certains commentateurs, notamment Jacques Sésiano[38], est un élément important pour soutenir la thèse que les *Arithmétiques* appartiennent à l'algèbre. Mais ceci me paraît être une ré-interprétation, cette fois en adoptant un point de vue « à la Viète », parce qu'à partir de cet auteur, l'art algébrique est devenu symbolique[39].

Au demeurant, ces abréviations n'ont semble-t-il pas été maintenues dans la traduction des Livres conservés seulement en arabe. La raison en est que les premiers écrits algébriques rédigés dans cette langue — le point de vue où je me suis moi-même placé — ne font usage d'aucun symbolisme, d'aucune abréviation mathématique. Leur existence dans le texte grec ne saurait donc constituer un critère *suffisant* pour affirmer qu'il s'agit d'algèbre.

La question des opérations de restauration et d'opposition (al-gabr wa-l-muqâbala, étape **7**) pourrait sembler davantage décisive, surtout si, comme je le fais ici, on lit Diophante du point de vue de l'algèbre arabe. Mais je voudrais introduire ici une nuance. D'après les informations que je dois à Ahmed Djebbar, les mots arabes "gabr" et "muqâbala" sont des substantifs désignant des manipulations, y compris en dehors des mathématiques, mais dont le sens algébrique relatif aux deux membres d'une équation se fixe vite.

Or, dans le texte grec de Diophante, on trouve simplement les infinitifs des verbes "ἀφαιρέω-ῶ" et "προστίθημι" qui signifient "retrancher" et "adjoindre", qu'il s'agisse d'ailleurs de nombres ou de grandeurs, dans tout type de textes mathématiques. Dès lors, quand nous lisons la Proposition I. 35 des *Éléments* d'Euclide (Annexes, 4), nous voyons que ces

---

[38] V. [Sésiano, 1999], pp. 33-34.

[39] Il y a tout un débat pour savoir s'il s'agit, chez Diophante, de symboles ou d'abréviations. Voir [Klein, 1992], pp. 146-147.

"manipulations" sont bien plus anciennes que Diophante — relevons au passage qu'Euclide utilise les deux mêmes verbes[40] — et que l'insertion des Notions communes 2-3 sert précisément à valider la possibilité de ces opérations.

Un mot sur I. 35 : le preuve euclidienne ressemble à une preuve visuelle du type de celle de la « géométrie du tangram » (par "couper-coller") chère aux mathématiciens chinois mais, si on regarde d'un peu plus près, on voit qu'elle repose d'une manière essentielle sur les notions communes 1 à 3 et la Demande 5 (par l'intermédiaire de la Proposition I. 29), c'est-à-dire sur les principes fondamentaux de l'axiomatique euclidienne. J'ajoute que ceci a son importance dans la mesure où cette Proposition est elle-même la pierre de fondation de la mesure des aires rectilignes dans les *Éléments,* c'est facile à vérifier.

Par conséquent, plutôt que d'interpréter Diophante comme précurseur d'al-Khwârizmî, ou Euclide comme précurseur de Diophante, je préfère considérer que l'Alexandrin Diophante s'inscrit dans une problématique dont certains éléments sont repris à Euclide. Bien entendu il y a d'importantes différences : Euclide pratique les manipulations d'égalités mais il n'utilise pas la notion d'égalité elle-même en tant qu'"objet" mathématique. Cela dit, le fait d'avoir regrouper 12 égalités d'aires, ou identités remarquables, dans son Livre II (12 Prop. sur 14 !) atteste sans doute d'une thématisation progressive de ladite notion d'"égalité".

*

Si l'on compare Diophante avec les écrits conservés des premiers algébristes arabes, on voit que deux traits essentiels font défaut à l'exposé des *Arithmétiques* :

• Les algébristes introduisent *d'emblée* les six formes canoniques de ce que nous appelons l'équation du 2^{nd} degré (y compris la forme dégénérée bx = c). Diophante, comme Héron, connaît sans doute certains des algorithmes associés à l'une ou l'autre de ces équations, mais il n'en produit pas de traitement systématique. L'argument est quelque peu incertain car cela figurait peut-être dans les Livres perdus.

---

40 Plus exactement Euclide utilise des verbes "ἀφαιρέω-ῶ" et "προσκεῖμαι" (à l'impératif présent moyen-passif). Il utilise en effet très souvent, à la voix moyenne-passive, le verbe "κεῖμαι" à la place de "τίθημι", qu'il s'agisse ou non d'une utilisation de la Notion commune 2. V. par exemple [Euclide 1990], p. 199, n. 17.

Mais, ce qui est plus important de mon point de vue, c'est qu'en tout état de cause, il n'en propose pas un exposé préliminaire[41].

• Non seulement les algébristes exposent et exemplifient ces procédures de résolution mais, dès l'époque d'al-Khwârizmî, ils en justifient la validité à l'aide de preuves géométriques.

Très vite, peut-être à l'instigation de Thâbit ibn Qurra, ils constatent que lesdites validations reposent sur les Propositions II. 5-6 des *Éléments* d'Euclide. La géométrie euclidienne, en particulier les propositions II. 1-10, joue peut-être un rôle dans la formulation des prosdiorismoi de Diophante, mais elles ne sont pas explicitement utilisées par lui pour justifier ses procédures de résolution.

L'insertion des six formes d'équations en position liminaire n'est pas sans importance. Al-Khwârizmî et Abû Kâmil, à la différence d'al-Khayyâm[42], s'expriment comme si les problèmes de l'algèbre étaient des problèmes arithmétiques. Mais le plan de leurs traités respectifs suit la même progression : exposé de la théorie des équations; résolution (algébrique) de problèmes géométriques, résolution de problèmes que les Grecs diraient logistiques (héritage, partage …). Autrement dit, les équations sont placées en position liminaire parce que leur étude anticipe les applications que l'on peut en faire aux domaines de l'arithmétique et de la géométrie ou, selon les cas, de la géodésie et de la logistique. Dès lors, on pourra constater que des problèmes relevant de domaines différents peuvent avoir la "même" solution parce qu'ils sont régis par la même équation canonique.

De mon point de vue ce sont là deux caractéristiques importantes de la première algèbre en langue arabe : se situer en deçà de la distinction « arithmétique *versus* géométrie »; s'obliger à articuler approches algorithmique et démonstrative dont nous avons reconnu l'existence dans les mathématiques grecques. Diophante, dans les *Arithmétiques,* n'est pas démonstratif[43]. Son apport ne consiste pas en l'usage de méthodes algébriques — qui préexisteraient — pour résoudre des problèmes arithmétiques, mais dans un traitement purement algorithmique (et analytique) de problèmes numériques dans un cadre bien plus large que celui des Livres arithmétiques d'Euclide. Disons, pour aller très vite, que ce dernier admettait seulement les "entiers naturels" ≥ 2, évitait la division et

---

[41] V. *supra,* ma remarque (**vi**) dans les commentaires à GIV. 19-20.

[42] Cf. le début de sa préface, citée *supra* en introduction : « … l'art de l'algèbre et de l'al-muqâbala, destiné à déterminer les inconnues numériques et géométriques… ».

[43] En revanche dans le fragment du traité *Sur les nombre polygones,* il utilise les verbes "ἀποδεικνύναι" et "συναποδεικνύναι" dans le sens de "démontrer".

donc pouvait ne pas recourir aux fractions. En revanche il mobilisait la notion de rapport de nombre à nombre, qui n'était pas conçu comme une quantité mais comme une relation ! Cette approche, très particulière, était commandée par l'usage qu'il voulait en faire dans l'étude de l'incommensurabilité et de l'irrationalité du Livre X. Pour sa part Diophante travaille sur les "nombres rationnels" strictement positifs; il est peut-être même le premier à élaborer la notion de "fraction générale". Pour Euclide, un nombre est toujours une multitude *déterminée* d'unités tandis que pour Diophante, il peut être une multitude *provisoirement indéterminée.* Tels sont les apports des *Arithmétiques.* A la lumière de ce qui vient d'être dit, il ne s'agit pas d'algèbre.

2. Le cas héronien

En ce qui concerne le ou les auteur(s) des *Geometrica,* nous pouvons simplement répéter les mêmes arguments, *mutatis mutandis.* Il s'agit d'une approche purement algorithmique non démonstrative, cette fois synthétique et cantonnée au seul domaine de la géométrie ou de la géodésie. Mais le cas de Héron lui-même est un peu plus intéressant. Dans son écrit authentique, les *Métriques,* on le voit pratiquer précisément ce que j'ai identifié comme une caractéristique essentielle de l'attitude des premiers algébristes arabes, à savoir justifier *géométriquement* des procédures de calcul. Dans les tout premiers problèmes du Livre I, il combine d'abord les deux approches, démonstrative et algorithmique, puis énonce — sous le nom de méthode — l'algorithme de résolution que l'on peut extraire de ce qui précède[44].

Mais, dans une remarque insérée à la fin de ce problème, il explique qu'à partir de là il coordonnera les deux approches dans une forme (très personnelle) d'analyse et de synthèse. L'analyse sera *géométrique* et énoncée dans la terminologie des *Données* d'Euclide; la synthèse sera numérique : elle constituera l'algorithme de résolution[45]. Les relations entre géométrie et algorithmique sont pratiquement l'inverse de ce que prônera Descartes — pour qui c'est l'algèbre qui est heuristique — ce qui, en un sens, est plus proche de la pratique de Diophante.

---

[44] Cf. par exemple le problème I. 6, *infra,* Annexes, 5a. Dans celui-ci Héron suppose que son lecteur connaisse les Prop. I. 47 et II. 12 des *Éléments.* La dernière étape (le rectangle contenu par AD, CB est le double du triangle ABC) est validée dans le problème I. 2a des *Métriques,* autrement dit une combinaison du problème I. 1 (des *Métriques*) et de la Prop. I. 41 des *Éléments.*

[45] Cf. par exemple le problème I. 10, *infra,* Annexes, 5b.

Je remarque au passage que lorsque Thâbit ibn Qurra montrent comment justifier les algorithmes de résolution des formes canoniques de l'équation du second degré à l'aide des Propositions II. 5-6 des *Éléments* d'Euclide, il le fait précisément à la manière de Héron, dans une analyse en termes de "connu" (= "donné").

Par conséquent la seule raison de ne pas parler d'algèbre dans ce cas est la limitation observée par Héron : celui-ci se cantonne aux algorithmes de mesure des figures géométriques, planes ou solides. Toute la structure du traité des *Métriques* est commandée par ce primat de la géométrie et non par la priorité des équations.

Pour conclure

Si nous nous abandonnons aux délices de l'histoire rétrospective, récapitulant les notions et les démarches présupposées par la constitution de la première algèbre arabe, nous pourrions nous dire qu'il n'a pas manqué grand chose aux Grecs pour y parvenir, en particulier chez les auteurs de l'Époque impériale tels Héron et Diophante. Ils ont progressivement thématisé les égalités ou "équations" comme "objet" mathématique. Diophante a esquissé une sorte de calcul proto-algébrique sur les expressions comportant des nombres provisoirement indéterminés et il a privilégié les manipulations des expressions que l'on appellera ultérieurement "restauration" et "opposition". Héron a reconnu, sinon introduit, l'idée de justification géométrique dans l'algorithmique grecque.

Mais chacun d'eux est resté tributaire des cadres de la classification des sciences, autrement dit d'un mode d'exposition fondé pour l'essentiel sur les "objets" — on dit souvent que les mathématiques grecques reposent sur des distinctions d'ordre ontologique — plutôt que sur des méthodes. Passer de l'algorithmique à l'algèbre supposait non seulement de justifier les procédures de calcul, mais aussi de dépasser le clivage « nombres *versus* grandeurs » pour constituer un domaine propre, situé en amont de l'arithmétique et de la géométrie, en amont de la logistique et de la géodésie, reposant sur une classification des équations susceptibles d'être appliquées ensuite à l'un ou à l'autre de ces domaines.

Dans l'état actuel de nos connaissances, les Grecs ne l'ont pas fait. Comment l'expliquer alors qu'ils en ont été si proches ? La question est difficile et sans doute assez vaine. On peut toutefois constater qu'après Diophante il n'y eut pour ainsi dire plus de travaux originaux en ce qui concerne les mathématiques grecques. Du IV^{e} au VI^{e} siècle, celles-ci ont notablement accru la dimension livresque qui était la leur depuis les débuts de l'époque impériale. L'activité principale des savants a dès lors résidé dans le commentaire des classiques qu'étaient devenus les écrits hellénistiques et les traités de Ptolémée. Les mathématiques ont été progressivement absorbées par le cursus des écoles philosophiques de l'Antiquité tardive, notamment les écoles néo-platoniciennes auxquelles on doit cependant le maintien de l'intérêt pour les disciplines du quadrivium. Dans ce cadre le système des oppositions qui commandaient les mathématiques grecques "classiques" s'est trouvé maintenu, malgré un certain rééquilibrage, au profit de l'arithmétique et aux dépens de la géométrie, peut-être à rapporter à l'influence, dans le même milieu, de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase et des doctrines (néo)-pythagoriciennes.

Il reste pourtant une dernière indication à exploiter, concernant le lien entre l'algèbre et une mathématique située en deçà du clivage arithmétique *versus* géométrie. L'intérêt de ce qui peut être dit "commun" à ces deux sciences n'est pas nouveau. On le trouve déjà explicité chez Aristote :

> « Parmi les principes dont on se sert dans les sciences démonstratives, les uns sont propres à chaque science, et les autres communs : mais c'est une communauté d'analogie, étant donné que leur usage est limité au genre tombant sous la science en question. Sont des principes propres, par exemple les définitions de la ligne et du droit; les principes communs sont des propositions telles que : si, de choses égales, on ôte des choses égales, les restes sont égaux. Mais l'application de chacun de ces principes communs est limitée au genre dont il s'agit, car il aura la même valeur, même s'il n'est pas employé dans sa généralité, mais appliqué, en Géométrie par exemple, aux grandeurs seulement, ou, en Arithmétique, aux nombres seulement »[46].

On en a l'écho chez Euclide. Mais, chez l'un comme chez l'autre, on se cantonne aux *principes* communs. Aristote les appelle "axiomes", Euclide "notions communes". Et il faut une fois encore souligner que chez l'auteur des *Éléments* les notions communes incontestablement authentiques régissent précisément le fonctionnement de l'égalité (elle est transitive) et sa comptabilité avec l'adjonction et le retranchement.

Or le seul philosophe connu de nous pour avoir *explicitement* élaboré une épistémologie des mathématiques, à savoir le néo-platonicien Proclus de Lycie, dans les deux prologues de son Commentaire au Livre des *Éléments,* va beaucoup plus loin qu'Euclide et Aristote. A deux reprises il tente de déterminer ce que peut être le contenu de cette mathématique commune. Tantôt il l'envisage d'une manière très large, comme un

---

46 *Seconds Analytiques,* I. 10, 76 a37-b2. Trad. fr. J. Tricot. Paris, Vrin, 1970, pp. 54-55.

ensemble de considérations esthétiques et métamathématiques qu'il cherche à articuler à la dialectique platonicienne, tantôt il prétend en identifier les *théorèmes* spécifiques. Ainsi, dans le premier prologue, il met l'accent sur la notion de rapport et sur la théorie des proportions[47], tandis que, dans le second, il mentionne les théorèmes de section du Livre II[48], c'est-à-dire les Propositions II. 1 à 10 que nous avons rencontrées à plusieurs reprises, aussi bien à propos de Diophante que des algébristes arabes.

Le fait me paraît extrêmement suggestif. Proclus est postérieur à Diophante et peut-être a-t-il réfléchi sur les *Arithmétiques.* Peut-être existait-il effectivement, à son époque, une version arithmétisée d'une partie du Livre II comme je l'ai suggéré. Mais Proclus était philosophe, pas vraiment mathématicien. Son souci n'était pas d'accroître le domaine des mathématiques, mais de donner des clés à ses élèves philosophes pour les mieux comprendre.

Finalement, autant que nous puissions le savoir, le pas décisif — la constitution de l'algèbre comme discipline en tant que telle, autour de ce noyau qu'est la classification des équations — a été franchi dans la première moitié du IX^e^ siècle, en Pays d'Islam, par al-Khwârizmî et ses pairs. Tout ce qui précède ne doit pas nous conduire à sous-estimer l'importance d'un tel pas. La plupart des "ingrédients" requis existaient peut-être dans les mathématiques grecques (sans oublier l'apport possible d'autres cultures, notamment celle de l'Inde), mais l'explicitation et la position liminaire de la théorie des équations ouvrait une perspective nouvelle. Et pour répondre à la question posée je dirai donc que je préfère ne pas parler d'algèbre grecque et d'en réserver le terme pour désigner cet apport arabe, peut-être initialement modeste, mais aux conséquences visiblement très importantes pour la suite de l'histoire des mathématiques.

---

[47] V. [Procli Diadochi, 1873], p. 7, l. 15—p. 10, l. 16.
[48] Cf. *supra,* note 25.

Indications bibliographiques

1. Éditions et traductions de textes anciens ou médiévaux

Aristote
Aristote, *Seconds Analytiques*. Trad. J. Tricot. Paris, Vrin, 1970.

Diophante
Diophantus Alexandrinus, *Opera omnia,* P. Tannery (ed.), Leipzig, Teubner, 1893.

Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones* par P. Ver Eecke. Bruges, 1926. Réimpr. Paris, Blanchard, 1959.

Sésiano, J., *Books IV to VII of Diophantus'* Arithmetica *in the arabic translation attributed to Qustâ ibn Lûqâ.* New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982.

Rashed, R., *Les Arithmétiques,* 2 volumes. Paris, les Belles-Lettres, 1984.

Euclide
Euclidis Elementa, post Heiberg ed. E. S. Stamatis, Leipzig, Teubner :
I. *Elementa* i-iv (1969); II. *El.* v-ix (1970); III. *El.* x (1972); IV. *El.* xi-xiii (1973);
V,1. *El.* xiv-xv, *Scholia in lib.* i-v (1977); V, 2. *Scholia in lib.* vi-xiii (1977).

Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments,* Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Introduction générale par Maurice Caveing (Vol. 1, pp. 13-148). Volume 1 (Livres I à IV), 1990; Volume 2 (Livres V à IX), 1994; Volume 3 (Livre X), 1998; Volume 4 (Livres XI à XIII), 2001.

Héron
Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, ed. W. Schmidt, Leipzig, Teubner : III. *Metrica, Dioptra* (1903, H. Schöne); IV. : *Definitiones, Geometrica* (1912, J.L. Heiberg); V. : *Stereometrica* (1914, J.L. Heiberg).

an-Nayrîzî
Abû l-'Abbâs al-Fadl ibn Hâtim an-Nayrîzî, *Sharh kitâb Uqlîdis fi l-Usûl.* Édité par R. O. Besthorn , J. L. Heiberg, puis G. Junge, J. Raeder et W. Thomson (Texte arabe et trad. latine) : *Euclidis Elementa ex interpretatione al'Hadschdschaschii cum Commentariis al' Nayrizii.* Hauniae, Lib. Gyldendaliana : I, 1 et 2 (= L. I), 1893-1897; II, 1 et 2 (= L. II et III), 1900-1905; III, 1, 2 et 3 (=L. IV, V, VI), 1910-1932).

Traduction latine par Gérard de Crémone.
Éditée par M. Curtze, *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii* (in *Euclidis Opera omnia,* ed. J.L. Heiberg & H. Menge, Leipzig, Teubner, IX. *Supplementum,* 1899).

Nouvelle édition en cours : Tummers, P. M. J. E., *Anaritius' Commentary on Euclid.* The Latin translation I-IV. Artistarium Supplementa IX. Nijmegen, Ingenium Publishers, 1994.

Nicomaque
Nicomachi Gerasini Introductionis Arithmeticæ Libri II, éd. R. Hoche. Leipzig, Teubner, 1866.

Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique,* Traduction J. Bertier, Paris, Vrin, 1978.

Papyrus d'Akhmim. Ed. J. Baillet.
Mémoires de la Mission archéologique française au Caire, Paris, 1892.

Proclus
Procli Diadochi, *In primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii.* G. Friedlein (ed.). Leipzig, Teubner, 1873

Proclus de Lycie, *Les Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide.* Traduction par P. Ver Eecke. Bruges, Desclée de Brouwer, 1948. Réimp. Paris, A. Blanchard.

'Umar al-Khayyâm
'Umar al-Khayyâm, *Traité en algèbre et en al-Muqâbala in*
Djebbar, A., et Rashed, R., *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm.* Alep, IHAS, 1981.

2. Etudes

Bourbaki, N., *Éléments d'histoire des mathématiques.* Paris, Hermann, 1974.

Caveing, M., *La figure et le nombre.* Presses Universitaires du Septentrion, 1997.

Chemla, J., « Résonances entre démonstration et procédure. Remarques sur le commentaire de Liu Hui (3^{e} siècle) aux Neufs Chapitres sur les Procédures Mathématiques (1er siècle). *Extrême-Orient, Extrême-Occident,* n°14, 1992, 91-129.

Chemla, J., « Relations between Procedure and Demonstration » in H. Niels Jahnke, N. Knoche, M. Otte (eds) *History of Mathematics and Education : Ideas and Experiences.* Göttingen, Vandenhœck & Ruprecht, 1996, 69-112.

Chemla, J., « Qu'est-ce qu'un problème dans la tradition mathématique de la Chine ancienne ? ». *Extrême-Orient, Extrême-Occident,* n°19, 1997, 91-126.

Djebbar, A., Une histoire de la science arabe. Entretiens avec Jean Rosmorduc. Paris, Éditions du Seuil, 2001. Chapitre 5 : « Les mathématiques », 201-239.

Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*. Oxford, 1921. Rééd. New York, Dover Publications, 1981, vol. II, Ch. XX. Algebra : Diophantus of Alexandria, 440-517.

Klein, J., Die Griechische Logistik und die Enstehung der Algebra.
Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung B, 3,1 (1934), 18-105 ; 2 (1936), 122-235. Trad. angl. par E. Brann :

Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra. Cambridge (Mass.), M. I. T. Press, 1968. Réimpr. New York, Dover Publications, 1992.

Ritter, J., « Babylone — 1800 » et « Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie » dans *Éléments d'Histoire des Sciences.* M. Serres (dir.), Paris; Bordas, 1989, pp. 16-37 et 38-61 respectivement.

Ritter, J. & Vitrac, B., « Pensée grecque et Pensée "orientale" », dans *Encyclopédie Philosophique,* Volume IV, Ch. 71, J. F. Mattéi (dir.). Paris, PUF, 1998, 1233-1250.

Sésiano, J., *Une introduction à l'histoire de l'algèbre.*
Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999.

Tannery, P., *Mémoires scientifiques* : 17 volumes. J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen (éd). Antiquité : Vol. I à III. Paris, Gauthier-Villars. 1912-1913. Tome I, N°20 (1882). De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide.

Thomaïdis, Y., « A framework for defining the generality of Diophantos' methods in *Arithmetica* ». *Archive for History of Exact Sciences,* à paraître.

Vitrac, B., Euclide et Héron : Deux approches de l'enseignement des mathématiques dans l'Antiquité ? in Argoud G. (ed.), *Science et vie intellectuelle à Alexandrie.* Publications de l'Université de Saint-Étienne, 1994, 121-145.

Vitrac, B., « A propos des démonstrations alternatives et autres substitutions de preuve dans les *Éléments* d'Euclide ». *Archive for History of Exact Sciences,* à paraître (2004).

*

Annexes[49]

1. Deux problèmes du Papyrus d'Akhmim

Ed. J. Baillet. *Mémoires de la Mission archéologique française au Caire,* Paris, 1892, resp. p. 65 et 72.

[n°4] : 3 associés. Leur production : 573 unités

[La 1^{e}] part	1/7	216	Le 7^{e} des 504 produit 72;
[La 2^{e}] part	1/8	189	Le 8^{e} des 504 produit 63;
[La 3^{e}] part	1/9	168	Le 9^{e} des 504 produit 56;

7 8 56; 9 56 produit 504.
Semblablement 72 et 63 et 56 produit 191. 573, partage en 191. Il est produit 3.
Semblablement 3 sur 72 produit 216, le 7^{e}; 3 sur 63 produit 189, le 8^{e};
3 sur 56 produit 168, le 9^{e}.

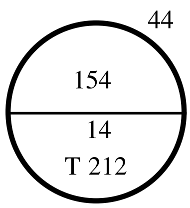
[n° 17] : A partir d'un trésor, quelqu'un a pris le 17^{e}; un autre, à partir du reste, a pris le 19^{e} et dans le trésor il est resté 200 unités.
Nous voulons savoir combien il y avait dans le trésor au départ.
Semblablement 17 sur 19 produit 323; le 17^{e} de 323 produit 19; à partir des 323 retranche 19 : reste 304. Le 19^{e} de 304 produit 16. A partir des 304, retranche 16; reste 288. Semblablement 323 par 200 produit 64600 et des 64600 le 288^{e}.
Lequel est 224 1/4 1/18.

2. Pseudo-Héron, *Geometrica*, Section 24,

a. Problèmes 38-39 = §§ 46-47.

Ed. Heiberg, p. 444—p. 446, l. 16.

38. Si je mélange le diamètre et le périmètre et l'aire du cercle, et que, mélangés, je trouve pour l'une et l'autre des choses dites un nombre de 212 pieds, séparons chacun des nombres les uns des autres.



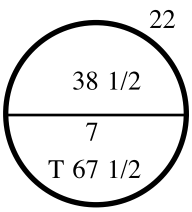
Je fais ainsi.
Les 212 je les multiplie dans tous les cas par un nombre de manière universelle, par 154; sont produits 32 648. A ceux-ci, de manière universelle, j'ajoute 841; ensemble sont produits 33 489. De ceux-ci, dans tous les cas, fais le côté carré : 183 pieds sont produits. Et à partir de ceux-ci retranche 29 de manière universelle; il reste 154. Dont le 11^{e} produit 14 pieds.
Autant de pieds que ceux-là sera le diamètre, et le périmètre 44 pieds.

---

49 Pour la commodité du lecteur, les annexes qui suivent proposent les traductions françaises des principaux textes mathématiques grecs anciens utilisés dans l'article. Il s'agit de traductions "de travail".

Et il est évident que l'aire sera 154 pieds. Ensemble ajoute les tous : 212 pieds sont produits.

39. Et si tu veux trouver aussi 7 par la même méthode, fais ainsi.
Mélangés, le diamètre et le périmètre et l'aire du cercle produisent ensemble 67 1/2 pieds; séparons chacun des nombres les uns des autres.



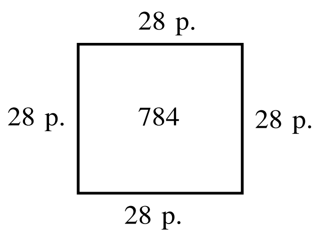
Je fais ainsi.
Je multiplie 67 1/2 par 154 de manière universelle; ensemble sont produits 10395 pieds. A ceux-ci, de manière universelle, j'ajoute 841; ensemble sont produits 11236 pieds. De ceux-ci, dans tous les cas, fais le côté carré : 106 pieds sont produits. A partir de ceux-ci retranche 29 de manière universelle; comme reste 77 demeurent.

Dont le 11^{e} : 7 pieds sont produits; le diamètre sera 7 pieds, et le périmètre 22 pieds. Et il est évident que l'aire sera 38 1/2 pieds.
Ensemble l'un et l'autre mélangés tu trouveras 67 1/2 pieds.

b. Problème 3.

Ed. Heiberg, p. 418, l. 3-14.

Une aire carrée ayant l'aire plus le périmètre : 896 pieds. Séparer l'aire du périmètre.



Je fais ainsi.
De manière universelle que soient proposées 4 unités. Dont le 1/2 produit : 2 pieds. Celles-ci, par elles-mêmes, produisent 4 pieds. Ajoute alors avec les 896; ensemble sont produits : 900 pieds. Dont le côté carré produit 30 pieds. Et à partir des 4, retranche le 1/2 : 2 pieds sont produits. Comme reste sont produits 28 pieds.

Donc l'aire est 784 pieds et le périmètre est 112 pieds; ensemble ajoute-les tous : sont produits 896; autant que ceux-là sera l'aire avec le périmètre : 896 pieds.

3. Diophante d'Alexandrie, *Arithmétiques*

a. Problème I. 27

Ed. P. Tannery, 1893, p. 60, l. 23—p. 62, l. 18.

Trouver deux nombres de telle manière que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.
Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres; et ceci est une condition formelle.

Qu'il soit donc prescrit que la somme des unités forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.
Qu'il soit prescrit que leur excédent est 2 arithmes.
Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Et si, à l'une d'elles, nous ajoutions la moitié de l'excédent, c'est-à-dire 1 arithme, et si nous la retranchions à la partie restante, il s'établirait de nouveau que leur somme est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.
Qu'il ait donc été prescrit que le plus grand nombre est 1 arithme avec les 10 unités qui sont la moitié de la somme; le plus petit nombre sera donc 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.
Reste aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme qui est égal à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ils satisfont les prescriptions de l'énoncé.

b. Problème GIV. 19

Ed. P. Tannery, 1893, p. 228, l. 7—p. 232, l. 8.

Trouver trois nombres dans l'indétermination de telle manière que le produit de deux quelconques d'entre eux, accru d'une unité, forme un carré.
Puisque nous voulons que le produit des 1^{er} et 2^{e} nombres, accru de 1 unité, forme un carré, si à partir d'un certain carré nous retranchons l'unité, nous aurons le produit des 1^{er} et 2^{e} nombres.
Formons le carré d'arithmes en quantité quelconque avec 1 unité; que ce soit celui de 1 arithme plus 1 unité; ce carré lui-même sera 1 carré d'arithme plus deux arithmes plus une unité. Si nous en retranchons 1 unité, il reste 1 carré d'arithme plus deux arithmes; ce qui sera le produit des 1^{er} et 2^{e} nombres. Que le 2^{e} soit 1 arithme; donc le 1^{er} sera 1 arithme plus 2 unités.
De nouveau, puisque nous voulons que le produit des 2^{e} et 3^{e} nombres, accru de 1 unité, forme un carré, si, pareillement, à partir d'un certain, carré nous retranchons 1 unité, nous aurons le produit des 2^{e} et 3^{e} nombres.
Que soit formé le carré de 3 arithmes plus 1 unité; ce carré sera 9 carrés d'arithme plus 6 arithmes plus une unité. Si donc nous en retranchons 1 unité, sont produits 9 carrés d'arithme plus 6 arithmes. Il faut donc que le produit des 2^{e} et 3^{e} nombres soit 9 carrés d'arithme plus 6 arithmes. Or, le 2^{e} est 1 arithme; reste donc le 3^{e} nombre qui sera 9 arithmes plus 6 unités.
De nouveau, puisque nous voulons que le produit des 1^{er} et 3^{e} nombres, accru de 1 unité, forme un carré, tandis que le produit des 1^{er} et 3^{e}, accru de 1 unité, est 9 carrés d'arithmes plus 24 arithmes plus 13 unités, que ce soit égal à un carré.
Nous avons donc les carrés d'arithme quadratiques; si donc les unités étaient aussi quadratiques, et si le double produit des côtés des carrés d'arithme et des unités était égal aux arithmes, les trois conditions seraient satisfaites dans l'indétermination.

Mais les 13 unités proviennent du produit de deux unités et de 6 unités, accru de 1 unité, et les 2 unités proviennent du double produit de 1 arithme et de 1 unité; tandis que les 6 unités proviennent de nouveau du double produit de 3 arithmes et de 1 unité.

Dès lors, nous voulons que le double [d'une quantité] d'arithmes, multiplié par le double [d'une quantité] d'arithmes, accru de 1 unité, forme un carré. Mais, le double [d'une quantité] d'arithmes multiplié par le double [d'une quantité] d'arithmes est leur quadruple produit.

Nous voulons donc que leur quadruple produit accru de 1 unité, forme un carré. Mais par ailleurs, le quadruple produit de tout couple de nombres, accru du carré de leur différence, forme un carré; donc, si nous établissons que le carré de leur différence est 1 unité, leur quadruple produit, accru de 1 unité, forme un carré.

Dès lors, si le carré de leur différence est 1 unité, leur différence est aussi 1 unité. Il faut donc former des carrés à partir d'arithmes, prises successivement, accrus de 1 unité : le carré de 1 arithme plus 1 unité, et celui de 2 arithmes plus 1 unité.

Or, celui de 1 arithme plus 1 unité sera 1 carré d'arithme plus 2 arithmes plus une unité. Si nous en retranchons l'unité, le reste devient 1 carré d'arithme plus 2 arithmes. Dès lors, il faut que le produit des 1er et 2^{e} nombres soit 1 carré d'arithme plus 2 arithmes. Qu'il soit prescrit que le 2^{e} est 1 arithme; reste le 1er qui sera 1 arithme plus 2 unités.

De nouveau, puisque le carré de 2 arithmes plus 1 unité est 4 carrés d'arithme plus 4 arithmes plus 1 unité, si nous retranchons pareillement 1 unité, le reste devient 4 carrés d'arithme plus 4 arithmes. Il faut alors que le produit des 2^{e} et 3^{e} nombres soit 4 carrés d'arithme plus 4 arithmes, et le 2^{e} nombre est 1 arithme; reste donc le 3^{e} qui sera 4 arithmes plus 4 unités.

On a ainsi résolu dans l'indétermination le fait que le produit de deux quelconques des nombres, accru de 1 unité, forme un carré, et l'arithme y devient autant que l'on voudra.

Car, chercher de manière indéterminée c'est, s'il y a telle ou telle expression, afin de faire que, dans ces expressions, la condition soit satisfaite, l'arithme étant autant que l'on voudra.

c. Problème GIV. 20

Ed. P. Tannery, 1893, p. 232, l. 10—p. 234, l. 12.

Trouver quatre nombres de telle manière que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté d'une unité, forme un carré.

Puisque nous voulons que le produit des 1er et 2^{e} nombres, accru de 1 unité, soit un carré, si d'un certain carré nous retranchons 1 unité, nous aurons le produit des 1er et 2^{e} nombres. Formons le carré de 1 arithme plus 1 unité; ce carré même sera 1 carré d'arithme plus deux arithmes plus une unité. Si nous en retranchons 1 unité, il reste 1 carré d'arithme plus deux arithmes, le produit des 1er et 2^{e} nombres. Que le 1er soit 1 arithme; [le 2^{e} sera donc 1 arithme] plus 2 unités.

De nouveau, puisque nous voulons que le produit des 1er et 3^{e} nombres, accru de 1 unité, forme un carré, formons le carré de 2 arithmes plus 1 unité, c'est-à-dire ceux qui viennent à la suite, à cause de ce qui a été montré précédemment.

Et le prenant, retranchons-en 1 unité, et posons que le produit des 1er et 3^{e} nombres est 4 carrés d'arithmes plus 4 arithmes. Or, le 1er est 1 arithme; reste donc le 3^{e} qui est 4 arithmes plus 4 unités.
De nouveau, puisque nous voulons que le produit des 1er et 4^{e} nombres, accru de 1 unité, forme un carré, formons le carré à partir de ceux qui viennent à la suite, celui de 3 arithmes plus 1 unité. Et le prenant, retranchons-en 1 unité, et nous aurons comme produit des 1er et 4^{e} nombres, 9 carrés d'arithmes plus 6 arithmes. Or, le 1er est 1 arithme; reste donc le 4^{e} qui sera 9 arithmes plus 6 unités.
Et puisqu'il se fait que le produit des 3^{e} et 4^{e} nombres, accru d'une unité, forme un carré; mais que le produit des 2^{e} et 4^{e}, accru d'une unité, forme 9 carrés d'arithmes plus 24 arithmes plus 13 unités, que ceci soit égal au carré formé à partir de 3 arithmes moins 4 unités, et l'arithme devient 1/16.
Revenant aux expressions, le 1er nombre sera 1/16; le 2^{e} sera 33/16, le 3^{e} sera 68/16, et le 4^{e} 105/16.

d. Problème GIV. 28

Ed. P. Tannery, 1893, p. 252, l. 4—p. 258, l. 17.

Trouver deux nombres de telle manière que leur produit, augmenté ou diminué de leur somme, forme un cube.
Puisque le produit des nombres, augmenté de leur somme, forme un cube, qu'il forme 64 unités. Ensuite, puisque le produit des nombres, diminué de leur somme, forme [un cube, qu'il forme] 8 unités.
Deux fois leur somme, constituant l'excédent [des cubes], sera donc 56 unités; en sorte que leur somme sera 28 unités. Mais leur produit, augmenté de leur somme, forme 64 unités; reste donc leur produit qui sera 36 unités.
Nous sommes donc amenés à trouver deux nombres [dont la somme forme] 28 unités, et dont le produit est 36 unités.
Qu'il soit donc prescrit que le plus grand est 1 arithme plus 14 unités; le plus petit sera donc 14 unités moins 1 arithme.
Reste à égaler leur produit, c'est-à-dire 196 unités moins 1 carré d'arithme à 36 unités, et 1 carré d'arithme devient égal à 160 unités.
Et si 160 unités étaient quadratiques, pour moi la question cherchée serait résolue.
Mais les 160 unités sont l'excédent de 196 unités sur 36; mais les 196 unités sont le carré de 14 unités; tandis que 14 est la moitié des 28; de sorte que les 196 sont la moitié de 28 multipliée par elle-même. Mais 28 est la moitié de 56; de sorte que 14 est 1/4 de 56. mais, 56 est l'excédent des deux cubes 64 et 8; tandis que 36 est la moitié de la somme de ces cubes.
Nous sommes donc amenés à trouver deux cubes de telle manière que le 1/4 de leur excédent, multiplié par lui-même, et diminué de la moitié de leur somme forme un carré.
Que le côté du plus grand cube soit 1 arithme plus 1 unité, et celle du plus petit, 1 arithme moins 1 unité. Ces cubes deviennent, l'un, le plus grand, [1 cube d'arithme] plus 3 carrés d'arithme plus 3 arithmes plus 1 unité, et l'autre, le plus petit, 1 cube d'arithme plus 3 arithmes moins 3 carrés d'arithme moins 1 unité.

Le 1/4 de leur excédent est 1(1/2) carré d'arithme plus 1/2 d'unité, et cette expression, multipliée par elle-même, devient 2[(1/4)] bicarrés d'arithme plus 1(1/2) carré d'arithme plus 1/4 d'unité. Si nous en retranchons la moitié de la somme des cubes, laquelle est 1 cube d'arithme plus 3 arithmes, le reste devient 2(1/4) bicarrés d'arithme plus 1(1/2) carré d'arithme plus 1/4 d'unité moins 1 cube d'arithme moins 3 arithmes; ce qui doit être égal à un carré.

Prenons le tout quatre fois à cause de la fraction; il est produit 9 bicarrés d'arithme plus 6 carrés d'arithme plus 1 unité moins 4 cubes d'arithme moins 12 arithmes. Égalons ceci au carré dont le côté est 3 carrés d'arithme plus 1 unité moins 6 arithmes; celui-ci sera donc 9 bicarrés d'arithme plus 42 carrés d'arithme plus 1 unité moins 36 cubes d'arithme moins 12 arithmes, lesquels sont égaux à 9 bicarrés d'arithme plus 6 carrés d'arithme plus 1 unité moins 4 cubes d'arithme moins 12 arithmes.

Que ce qui manque soit ajouté de part et d'autre et [retranchons] les semblables des semblables : les 32 cubes d'arithmes restants sont égaux à 36 carrés d'arithme, d'où l'arithme devient (9/8).

Revenons aux expressions. Nous avons posé que les côtés des cubes étaient, l'un 1 arithme plus l'unité, et l'autre 1 arithme moins 1 unité; par conséquent, l'un sera (17/8), et l'autre (1/8). Ces mêmes cubes seront : le 1er (4913/512), et le 2^{e} (1/512).

Revenons maintenant à la question de départ, et cherchons à ce que le produit des nombres, augmenté de leur somme, forme le cube (4913/[512]) et que leur produit, diminué de leur somme, forme le cube (1/[512]).

Puis donc que le produit des nombres, augmenté de leur somme, forme un cube, c'est-à-dire (4913/512) unités, et que le produit des nombres, diminué de leur somme, forme un cube, c'est-à-dire (1/512) d'unité, le double de leur somme est l'excédent [de ces cubes], c'est-à-dire (4912/[512]), en sorte leur somme sera (2456/[512]). Mais leur produit, augmenté de leur somme, est (4913/512), et la somme des nombres est (2456/512); donc, leur produit sera (2457/[512]) unités.

Bien que cette démonstration ait été préalablement indiquée dans le premier Livre, elle sera aussi indiquée maintenant, à l'occasion de ce problème.

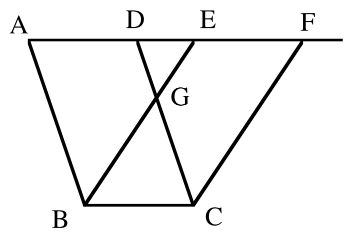
Qu'il soit posé que le 1er nombre est 1 arithme avec la moitié des unités qui constituent la somme des nombres, c'est-à-dire (1228/512) unités; le 2^{e} sera donc (1228/512) unités moins un arithme, et leur somme sera ainsi (2456/512) unités. Mais leur produit est (1 507 984/262 144) moins 1 carré d'arithme. Égalons ceci à (2457/512) unités. Multiplions tout par [la] fraction, c'est-à-dire par 262 144; [retranchons] les semblables des semblables, et 262 144 carrés d'arithme deviennent égaux à 250 000 unités, d'où l'arithme devient 500/512 d'unité.

Revenant aux expressions, le 1er nombre sera 1728/[512]; le 2^{e} sera 728/[512], et la démonstration est évidente.

4. Euclide, *Éléments,* Proposition I. 35

Ed. Heiberg, p. 48, l; 10—p. 49, l. 12.

Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.
Soient ABCD, EBCF des parallélogrammes sur la même base BC, et dans les mêmes parallèles AF, BC. Je dis que le parallélogramme ABCD est égal au parallélogramme EBCF.



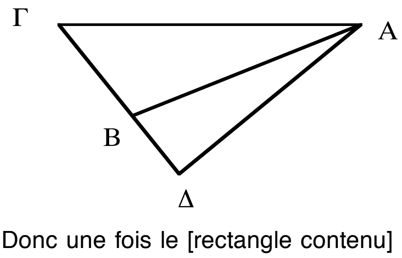
En effet, puisque ABCD est un parallélogramme, AD est égale à BC. Alors pour la même raison EF est aussi égale à BC. De sorte que AD est aussi égale à EF. Et DE est commune; donc AE toute entière est égale à DF toute entière. Or AB est aussi égale à DC; alors les deux EA, AB sont égales aux deux FD, DC, chacune à chacune. Et l'angle sous FDC est égal à l'angle sous EAB, l'extérieur à l'intérieur.
Donc la base EB est égale à la base FC et le triangle EAB sera égal au triangle DFC. Que DGE soit *retranché* de part et d'autre : le trapèze restant ABGD est donc égal au trapèze restant EGCF. Que le triangle GBC soit *ajouté* de part et d'autre : le parallélogramme ABCD tout entier est donc égal au parallélogramme EBCF tout entier. Donc les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. Ce qu'il fallait démontrer.

5. Héron d'Alexandrie, *Métriques*

a. Problème I. 6

Ed. H. Schöne, 1903, p. 14, l. 18—p. 16, l. 14.

Soit le triangle obtusangle ABC ayant le côté AB de 13 unités, le côté BC de 11 unités, le côté AC de 20 unités. Trouver sa perpendiculaire et son aire.
Que BC soit prolongée et, sur elle, que soit menée AD, perpendiculaire.



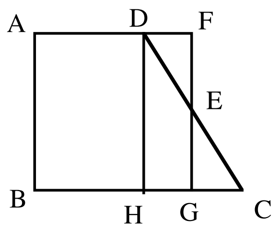
<Donc> le carré sur AC est plus grand que ceux sur AB, BC par deux fois le [rectangle contenu] par CB, BD. Et d'une part le carré sur AC est 400 unités, d'autre part celui sur BC, 121 unités, et celui sur AB 169; donc deux fois le [rectangle contenu] par CB, BD est 110 unités.
Donc une fois le [rectangle contenu] par CB, BD est 55 unités. Et BC est 11 unités. Donc BD sera 5 unités. Mais en outre AB est 13 unités; donc AD sera 12 unités. Mais, en outre, BC est 11 unités. Donc le [rectangle contenu] par AD, CB est 132 unités. Et c'est le double du triangle ABC. Donc le triangle ABC sera 66 unités.

Et la méthode sera la suivante :
Les 13 par elles-mêmes, il est produit 169; et les 11 par elles-mêmes, il est produit 121; et les 20 par elles-mêmes, il est produit 400. Ajoutes-les 169 et les 121, il est produit 290; celles-ci, retranches-les des 400; il reste 110. De ceux-ci la moitié, il est produit 55. Appliques-les selon les 11; il est produit 5.
Et les 13 par elles-mêmes, il est produit 169; retranches-en les 5 par elles-mêmes; reste 144. De celles-ci le côté carré : il est produit 12. Telle sera la perpendiculaire, 12 unités. Celles-ci par les 11, il est produit 132; de celles-ci la moitié : 66. Autant que cela sera l'aire du triangle.
Jusqu'à ce [problème]-ci, tout en calculant, nous avons produit des démonstrations géométriques; dans la suite nous produirons les mesures selon l'analyse, grâce à la synthèse des nombres.

b. Problème I. 10

Ed. H. Schöne, 1903, p. 28, l. 4—p. 30, l. 12.

Soit le trapèze rectangle ABCD ayant les angles en A, B, droits et soit le côté AD de 6 unités, le côté BC de 11 et le côté AB de 12 unités. Trouver son aire ainsi que CD.
Que CD soit coupée en deux [parties égales] en E et que par E soit menée FEG, parallèle à AB, et que AD soit prolongée jusque F.



Puisque DE est égale à EC, DF est aussi égale à GC. Que les AD, BG soient ajoutées de part et d'autre; donc AF, BG, les deux [prises] ensemble, sont égales aux AD, BC, les deux [prises] ensemble. Or AD, BC, les deux [prises] ensembles, c'est donné, puisque chacune d'elle [l'est] aussi; donc AF, BG, les deux [prises] ensemble] c'est aussi donné, c'est-à-dire deux BG; et donc BG est donnée.
Mais aussi AB; donc le parallélogramme ABFG est donné. Et puisque le triangle DEF est égal à EGC, que le polygone à cinq côtés ABGED soit ajouté de part et d'autre : le parallélogramme ABFG tout entier est égal au trapèze ABCD tout entier. Or il a été démontré que le parallélogramme ABFG est donné; donc le trapèze ABCD est aussi donné.
Et CD sera trouvée ainsi : que soit menée la perpendiculaire DH. Puisqu'en effet AD est donnée, donc BH est aussi donnée; mais aussi BC; et donc le reste CH est donné. Mais aussi DH — car elle est égale à AB —; et l'angle en H est droit; donc CD est aussi donnée.
Et cela sera synthétisé en suivant l'analyse de la manière suivante :
Ajoutes les 6 et les 11 : il est produit 17. De celles-ci la moitié : il est produit 8 2'. Celles-ci, sur les 12 : il est produit 102. Autant est l'aire.
Et pour CD, ainsi : Retranche, à partir des 11, les 6 : il est produit 5 [comme] reste; Celles-ci par elles-mêmes : il est produit 25; Et les 12 par elles-mêmes : il est produit 144. Ajoutes les 25 : il est produit 169. De celles-ci le côté produit 13; autant que cela sera DC.